

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

ORLANDO DE ANDRADE FIGUEIREDO

SENTIDOS DE PERCEPÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
GEOMETRIA DINÂMICA E ENSINO DE FUNÇÕES COM
AUXÍLIO DE REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do *Campus* de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo de C. Borba

Rio Claro – SP

2010

510.1 Figueiredo, Orlando de Andrade
F475s Sentidos de percepção e educação matemática: geometria
dinâmica e ensino de funções com auxílio de representações
dinâmicas / Orlando de Andrade Figueiredo. - Rio Claro :
[s.n.], 2010
105 f. : il., figs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

1. Matemática - Filosofia. 2. Fenomenologia. 3. Função. 4.
Transformação linear. I. Título.

ORLANDO DE ANDRADE FIGUEIREDO

SENTIDOS DE PERCEÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
GEOMETRIA DINÂMICA E ENSINO DE FUNÇÕES COM
AUXÍLIO DE REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do *Campus* de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba (orientador)

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Prof. Dr. Nilson José Machado

Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi

Rio Claro, SP, 3 de novembro de 2010

Agradecimentos

Mandam as normas que “os agradecimentos [sejam] dirigidos apenas àqueles que contribuíram de maneira relevante à elaboração do trabalho”. Talvez isso queira dizer que somente devam ser citados aqueles que apontaram alguma melhoria concreta em alguma parte do mesmo. Mas, como poderia eu desconhecer outras formas de apoio, que foram para mim, em diversos momentos da caminhada, tão ou mais presentes que aquelas formalmente reconhecidas? É por isso que quero começar justamente pelas pessoas que, embora nunca tenham sabido exatamente de que se tratava o que tanto me ocupava, e me deixava mais distante e indisponível, compreenderam que devia ser alguma coisa muito séria, e, naturalmente, demonstraram uma solidariedade que foi muito importante *sentir*: essa *corrente pra frente* foi sempre uma força a mais a me empurrar e é por isso que eu agradeço a todos eles, a começar por meus familiares e amigos, de perto ou de longe, em contato ou nem tanto; meus colegas de trabalho—professores e funcionários da Unesp em Rio Claro—e alunos, as pessoas que prestam serviços para mim, os vizinhos e aqueles com quem convivo nos espaços públicos em Rio Claro e São Paulo. No final, quando eu me envolvi mais intensamente com estudos sobre percepção, muitos tiveram a boa vontade de me ouvir falar longamente sobre o tema, o que foi muito importante.

Aproximando-me daqueles que compreendem “o mérito do trabalho”, reconheço um grande grupo a quem gostaria de agradecer em gênero, antes de citar nomes em particular: trata-se da comunidade de pesquisa em educação matemática como um todo e, em especial, a comunidade deste programa de pós-graduação e o grupo de pesquisa a que me associei, o GPIMEM. Como alguém que vem das ciências exatas e teve o primeiro contato efetivo com as ciências humanas neste doutorado, posso testemunhar que, na área da educação matemática, as ciências humanas cumprem aquilo que prometem: multiplicidade, receptividade, atenção aos fundamentos. Ao longo de todo esse período em que estive inserido nessas comunidades, participando de todo tipo de atividade, sejam seminários, palestras, eventos, aulas, discussões em listas de email, etc., a convivência foi muito positiva, salutar e estimulante. E, mais do que isso, sempre senti, em todos, uma boa vontade e uma generosidade em trocar ideias, experiências, artigos, livros, em ler e comentar trabalhos, projetos, capítulos de tese. É uma comunidade efetivamente engajada na sua missão principal, isto é, fazer acontecer a educação matemática para todos, no Brasil e no mundo. E tem subsídios teóricos privilegiados para abordar os problemas, pois está aberta

e está em busca dos fundamentos do fenômeno humano. Não posso desconhecer a importância que esse *ambiente favorável* teve para mim. Gostaria de enumerar tantas pessoas que participaram disso, mais ou menos na ordem cronológica dos acontecimentos, já sabendo que, depois que a versão final deste documento fosse impressa, outros nomes me viriam à cabeça: Marcus Maltempi, Marcelo Borba, Maurício Rosa, Maria Bicudo, Sandra Barbosa, Silvia Viel, José Toledo, Maria Ednéia, Paula Malheiros, Leandro Diniz, Silvana Santos, Adriana Richit, Aira Casagrande, Neirelise Buske, João Luís Azevedo, Ricardo Scucuglia, Maria Helena Hermínio, Sueli Javaroni, Telma Gracias, Rúbia Zulatto, Antonio Olimpico, Geraldo Lima, Miriam Pentead, Ole Skovsmose, Miriam Andrade, Rosa Baroni, Célia Nunes, Carlos Eduardo, Carla Regina, Roger Miarka, Margarete Farias, Ana Paula Purcina, Lucieli Trivizoli, Paulo Hermínio, Ruy Madsen, Henrique Lazari, Ana Paula Jahn, Lulu Healy, Adelino Pimenta, Otávio Luciano, Marcos Lübeck, Fernando Cury, Maria Dirlene, Jamur Venturim, Inajara, Maria Lúcia, Marco Escher, Luzia de Souza, Tânia Bauer, Maria Queiroga, Verilda Kluth, Fabiane Mondini, Audria Bovo, Claudemir Murari, Magali Gomes, Thiago Pedro, PH, Marli dos Santos, Luciano de Lima, George Gadanidis, Leo Barrichelo, Adriano, Claudio Woerle, Romulo Lins, Heloísa da Silva, Rosana Miskulin, Marcos Teixeira, João Viola, Regina Franchi, Paula Tagliari, Nilton Domingues, Alana, Vanderlei Nascimento, Marco Aurélio Jr., Edinei Leandro, Gustavo Barbosa, Renato Marcone, Guilherme Silva, Sinval de Oliveira, Débora Soares, Nicolas, Daise Souto, Bruna Lammoglia, Claudinei Santanna.

De grande importância para este trabalho foi o meu envolvimento em atividades que, à primeira vista, poderiam ser qualificadas como paralelas, mas que foram fontes de questionamentos produtivos. Assim foi, principalmente, o desenvolvimento da ferramenta *Draw and Geometry*. Gostaria de agradecer a diversos colaboradores que tive nessa tarefa, desta vez na ordem cronológica inversa da participação: Ana Sanchez, Cristina Dias, Fabiano Calixto, Luís De Rossi, Helen Costa, Leandro Lupori e Wellington Chaves, sem falar na equipe de educação matemática, Marcelo, Marcus, Ricardo, Silvana, Paula. Agradeço à Fapesp e a diversos colaboradores de outras instituições envolvidas, representadas aqui nas pessoas da coordenadora de núcleo, Profa. Dra. Maria da Graça Pimentel (ICMC, USP), e do coordenador de projeto, Prof. Dr. Wilson Ruggiero (Escola Politécnica, USP).

Agradeço aos professores doutores Maria Bicudo, Nilson José Machado, Lulu Healy, Marcus Maltempi e Marcelo Borba por todas as sugestões e apontamentos no exame de qualificação e na defesa de tese, e à profa. Maria Bicudo, em particular, por importantes conselhos e depoimentos sobre a carreira docente. A ela, com quem fiz duas disciplinas, devo ainda um agradecimento especial, por sua convicção, continuidade e dedicação à fenomenologia, que foram, para um novato perdido no mar de teorias e correntes de pensamento em oferta, um farol indicando

a terra firme.

A pessoa com quem mais compartilhei a vivência deste trabalho foi, sem nenhuma dúvida, o orientador, o prof. Marcelo Borba. E reconheço que, para ele, não foi uma experiência sem percalços, que ele passou por momentos de certa angústia, devido, entre outros motivos, ao meu insistente comportamento em querer mudar os rumos do trabalho o tempo todo, até mesmo no final. E, no entanto, Marcelo me deu uma grande lição nessa história toda, sabendo manter uma atmosfera positiva para mim, agindo com paciência nas horas em que não adiantaria fazer diferente, fazendo a *boa pressão* em momentos decisivos em que eu poderia perder prazos, e, acima de tudo, ao sempre me fazer perceber que ele reconhecia algum valor no meu trabalho. Isso foi muito importante, porque significava a aprovação de alguém que acompanha a produção da área de educação matemática de uma posição privilegiada, e tem uma sensibilidade aguçada para as grandes questões de fundo e tendências da área. Marcelo teve também a sensibilidade para perceber a importância que o aspecto financeiro desempenharia durante o trabalho, podendo se tornar uma preocupação a mais a me atrapalhar, e me apresentou soluções para manter o equilíbrio neste quesito. O convite para participar da equipe de desenvolvimento do GPIMEM no projeto TIDIA-Ae foi o ponto de partida para uma série de acontecimentos que marcaram minha trajetória. Agradeço ao Marcelo por tudo isso e pelo companheirismo ao longo de toda a jornada, que estendo a seus familiares.

Foi de Marcelo a sugestão e a mobilização inicial para a solicitação de afastamento de minhas atividades docentes no semestre de fechamento do trabalho. Esse acontecimento, no final, mostrou-se muito mais importante do que eu esperava de início: com ele eu consegui a *imersão* que me permitiu atingir marcos definidores; não foi simplesmente uma forma de fazer em seis meses o que se faria em doze com compromisso de aulas em paralelo. Nesse quesito, eu devo diversos agradecimentos a várias pessoas e instâncias, além do Marcelo: aos órgãos administrativos superiores da Unesp, de quem foi a decisão final; ao diretor deste instituto, o Prof. Dr. Antônio Carlos Simões Pião e à Chefe do Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, Profa. Dra. Adriane B. de Souza Serapião, que se mobilizaram pessoalmente para que o pedido fosse encaminhado e acatado; sem falar à congregação do instituto e ao conselho e corpo do departamento e, por fim, aos pareceristas de diversas instâncias: o professores doutores Henrique Lazari e Marcus Maltempí. Agradeço ainda ao Prof. Dr. Eraldo P. Marinho, que, por consequência deste afastamento e da falta de candidatos a substituto, assumiu uma turma a mais no período.

Resumo

Os processos perceptivos que fundamentam a experiência humana podem nos parecer absolutamente naturais. Devido a isso, costumamos não tematizá-los. Este trabalho é um esforço de evidenciação da percepção na educação matemática, mais especificamente na geometria dinâmica e no ensino de funções com auxílio de representações dinâmicas. Percepção é entendida em uma concepção fenomenológica. Sustenta-se que: (a) é da natureza humana certa capacidade de perceber comportamentos de dependências entre eventos do mundo físico, isto é, existe um sentido de percepção de dependência; (b) as representações dinâmicas de funções, como os Dynagraphs (conhecidos na literatura) e os funcionetes (propostos no trabalho), são apreendidas pelo sentido de percepção de dependência; (c) o emprego de representações dinâmicas no auxílio ao ensino de funções abre novos sentidos para funções matemáticas, conceitos, propriedades e teoremas correlatos, justificando o interesse em sua aplicação; além disso, os sentidos abertos são perceptivos e, por isso, diretos, imediatos e evidentes (conforme a fundamentação fenomenológica); (d) existe um sentido de percepção de restrições ou impedimentos; (e) na resolução interativa (geometria dinâmica) de sistemas de restrições geométricas, o sentido de percepção de restrições apresenta, ao trazer perceptivamente as restrições para primeiro plano, as construções geométricas como uma combinação de restrições. No desenvolvimento dessas ideias: apresentam-se os funcionetes planos e sua aplicação na construção de uma abordagem pedagógica para o conceito (da álgebra linear) transformação linear, que é um tipo de função; abordam-se os tópicos: autovetores de um operador linear, propriedade de linearidade e núcleo de uma transformação linear, inclusive o teorema do núcleo e da imagem, apresentado em um sentido perceptivo; discute-se a representação gráfica de funções em comparação com as representações dinâmicas; discute-se o papel da cognição corporificada na educação matemática e ampliação da noção de visualização para percepção; explicita-se o sentido puramente matemático da geometria dinâmica e como o seu entendimento contribui para a superação de obstáculos conceituais e o projeto de interfaces; fundamenta-se o trabalho a partir da noção de sentido.

Palavras-chave: Filosofia da Educação Matemática. Percepção. Fenomenologia. Função. Transformação Linear.

Abstract

The perceptive processes that provide the basis for human experience can seem absolutely natural. Therefore we do not have the habit of focusing on them as the object of study. The present theoretical study aimed to make perception evident in the context of mathematics education, specifically dynamic geometry and teaching of functions using dynamic representations. Perception is understood as a phenomenological conception. It is maintained that: (a) it is of human nature to be able to perceive dependent behaviors among events in the physical world, i.e. a sense of perception of dependence; (b) dynamic representations of functions, such as Dynagraphs (known in the literature) and *funcionetes* (proposed here), are ascertained through the sense of perception of dependence; (c) the use of dynamic representations to aid in the teaching of functions opens up new senses for mathematical functions, concepts, properties and correlated theorems, justifying interest in its application; in addition, these newly-opened senses are perceptive in nature, and therefore direct, immediate and evident (according to foundations of phenomenology); (d) there exists a sense of perception of constraints or impediments; (e) in the interactive resolution (dynamic geometry) of constraint systems for geometric domain, the sense of perception of constraints presents geometric constructions as a combination of constraints as it perceptively brings the constraints to the foreground. The concept of *funcionetes planos* is presented and their use proposed as part of an approach for teaching the concept (from linear algebra) of linear transformation, which is a type of function. Topics addressed include: eigenvectors of a linear operator, the property of linearity and nucleus of a linear transformation, including the theorem of nucleus and of image, presented in a perceptive sense. Graphic representation of functions is discussed in comparison with other dynamic representations as well as the role of cognition embodied in mathematics education and a broadened notion of visualization for perception. The purely mathematical sense of dynamic geometry is explained and how its understanding contributes to overcoming conceptual obstacles and to project interfaces. The study is based on the notion of sense and meaning.

Keywords: Philosophy of Mathematics Education. Perception. Phenomenology. Function. Linear Transformation.

Lista de Figuras

1	Um DynaGraph. À medida que x é movida, $x(x+3)$ se move de acordo. Fonte: Goldenberg e Cuoco (1998, p. 360).	14
2	Atividade <i>Como b depende de a?</i> , em que é empregado um dispositivo de representação dinâmica de função. Fonte: Bortolossi (2009).	15
3	Guarda-chuva lado-a-lado com construção de geometria dinâmica.	15
4	Utilização do pantógrafo e transformação linear sobreposta a um pantógrafo.	16
5	O cubo de Necker, uma imagem com múltiplos sentidos.	24
6	Dois sentidos volumétricos para a imagem da Figura 5.	24
7	Função matemática como um tipo especial de correspondência entre dois conjuntos.	29
8	Cubo impossível. Fonte: Alexeev (2008).	55
9	Experiência para mostrar a percepção de dependência.	64
10	Funcionete plano.	70
11	Funcionete plano com acessório de segmentos paralelos.	72
12	Momento em que os segmentos do funcionete plano ficam paralelos.	73
13	Resultado obtido com a ferramenta Rastro. A linha traçada corresponde ao núcleo da transformação linear associada ao funcionete plano.	74
14	Funcionete plano com acessório para alegoria da propriedade de linearidade. O funcionete plano ilustrado não corresponde a uma transformação linear.	76
15	Funcionete plano que corresponde a uma transformação linear.	76
16	Ilustração do efeito percebido em funcionetes planos de núcleo não trivial.	77
17	Funcionete especial.	81
18	Experiência de Scheffer (2002) adaptada; o funcionete especial é empregado.	81

19	Transposição dos dados coletados para um cilindro e obtenção da representação gráfica pela planificação do cilindro.	82
20	O movimento fica inexplicavelmente restrito à área à direita de uma fronteira imaginária.	88
21	Construção de arco capaz e verificação de sua propriedade em geometria dinâmica.	91
22	Construção de arco capaz e verificação de sua propriedade em um sistema computacional com interface textual.	93
23	Definição de arco capaz como um sistema de restrições (3.1) e verificação experimental de sua propriedade.	94
24	Problema do quadrilátero que se descaracteriza após movimentação na geometria dinâmica e solução alternativa.	97

Sumário

Introdução	13
1 Percepção e sentido	21
1.1 Considerações iniciais	21
1.2 Sentido	23
1.3 Introdução à fenomenologia	35
1.3.1 Intencionalidade	37
1.3.2 Redução transcendental e ausência de pressupostos	40
1.3.3 A descrição como método	46
1.4 Percepção	48
1.5 Considerações finais	57
2 Percepção de dependência, representação dinâmica de funções e uma abordagem pedagógica	62
2.1 Considerações iniciais	62
2.2 Percepção de dependência	63
2.3 Sentido alegórico-perceptivo de função matemática e representação dinâmica de funções	66
2.4 Abordagem pedagógica para o ensino de funções a partir da percepção de dependência	68
2.4.1 Funcionete plano	69
2.4.2 Autovetores de um operador linear	71
2.4.3 Núcleo de uma transformação linear	73

2.4.4	Propriedade de linearidade	75
2.4.5	Discussão	75
2.5	Representações dinâmicas e a representação gráfica de funções	80
2.6	Considerações finais	85
3	Percepção de restrição e geometria dinâmica	87
3.1	Considerações iniciais	87
3.2	Percepção de restrição	88
3.3	Geometria dinâmica como resolução de sistemas de restrições geométricas e a percepção de restrição	90
3.4	Implicações da concepção de geometria dinâmica como resolução de sistemas de restrições geométricas	96
3.5	Considerações finais	98
	Conclusões	99
	Referências Bibliográficas	103

Introdução

Abordar a percepção como tema de estudo é uma empreitada consideravelmente desafiadora. A percepção se esconde no mundo que ela ajuda a trazer à vida, isto é, somos tão próximos de nossos processos perceptivos que chegamos mesmo a nos esquecer deles. Tais afirmações podem contrariar aqueles que se consideram bons conhecedores de seus próprios processos perceptivos, afinal, não há mistério algum em apontar as cores e as formas que se veem, os sons que se ouvem, os cheiros, os sabores, as texturas e as temperaturas que se sentem. O desafio reside, justamente, em entender que estas são as manifestações mais palpáveis do fenômeno *percepção*, mas não são as únicas. Há sentidos muitos mais complexos associados à percepção. Por exemplo, o *sentido de recinto*, que bem poderia se chamar *sentido de caverna*. Há uma experiência interna que se abre para o indivíduo quando ele se encontra em um recinto. As dimensões, a luminosidade, a acústica fazem despertar um *gosto* próprio que distingue aquele recinto dos demais recintos que a pessoa conhece. Essa capacidade de discernir recintos, de estabelecer um registro, ou uma marca, ou uma impressão única a cada recinto que se habitou, é um momento originário da experiência que antecede conceituações simbólicas ou formais referentes a *recinto*. Sentidos como esse trazem traços da experiência perceptiva, isto é, eles são imediatos e, como já foi dito, originários. Mas, porque tão próximos, seguem implícitos, não tematizados, despercebidos. Um estudo da percepção deve, acima de tudo, lançar luzes sobre sentidos como esses, trazê-los à tona, explicitá-los, evidenciá-los. Assim, colocam-se em evidência esses pontos de brotamento do nosso mundo, alicerces dos nossos mais transparentes conceitos, palavras e juízos, e que não se resumem a puras cores, formas, sons, cheiros, sabores e texturas. O desafio metodológico que uma tal proposta carrega exige um enfrentamento corajoso da noção de objetividade que impregna nossa sociedade, pois cada explorador do mundo percebido está fadado a ter, como matéria de base em sua pesquisa, nada mais que suas próprias experiências *subjetivas* da percepção.

Quando se trata de matemática e educação matemática, essas questões se mostram particularmente interessantes. Ao se indagar sobre o papel da percepção no fazer matemático, um senso primeiro poderia, por exemplo, remeter à questão das formas na geometria. Pode-se perguntar se seria possível pensar em geometria de forma puramente simbólica, sem recorrer a alguma forma de visualização (percepção). Ou, ainda, se a visualização é apenas uma etapa primeira,

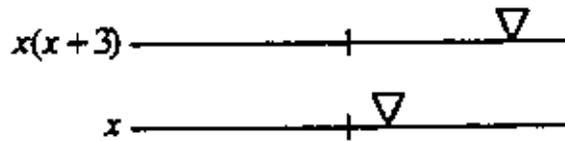


Figura 1: Um DynaGraph. À medida que x é movida, $x(x+3)$ se move de acordo. Fonte: Goldenberg e Cuoco (1998, p. 360).

a ser posta em segundo plano no momento da formalização matemática. Da mesma forma, o trabalho com expressões algébricas envolve certa habilidade em reconhecer padrões. Esses são exemplos de momentos da educação matemática em que o papel da percepção se mostra de uma forma palpável. *Porém, seria possível ir além e encontrar na educação matemática sentidos de percepção mais escondidos, seguindo uma metodologia nos moldes discutidos no início desta Introdução?* Este trabalho pode ser resumido como o apontamento de dois grandes exemplos nesta direção, envolvendo geometria dinâmica e ensino de funções. A seguir, apresento um pequeno histórico de como surgiram as inquietações que motivaram o trabalho.

Geometria dinâmica é uma modalidade de programas de computador voltada para o ensino de geometria, bem conhecida na educação matemática:

Um software de geometria dinâmica possibilita que estudantes criem construções geométricas e as manipulem facilmente. O aspecto “dinâmico” desses programas vem do recurso do *arrastar*, mediante o qual os usuários movem livremente certos elementos de um desenho e observam outros elementos responderem às mudanças de condições. A impressão que se tem ao ver o que está na tela é de que o desenho está sendo continuamente deformado através da ação de arrastar, enquanto são mantidas relações essenciais de restrição que foram estabelecidas na construção original. (GOLDENBERG; SCHER; FEURZEIG, 2008, p. 53–54, tradução minha)

Representação dinâmica de função é um termo usado por Goldenberg, Lewis e O’Keefe (1992) para tipificar um dispositivo informático—chamado DynaGraph—proposto por eles para ser aplicado ao ensino de funções matemáticas. O modelo mais comum de DynaGraph é composto por duas barras, tendo cada barra um pequeno cursor (Figura 1). “[...] O usuário arrasta a peça representando x para esquerda ou para a direita ao longo da reta numérica x e observa a resposta coerente da peça apoiada sobre a reta numérica acima, que representa o valor $f(x) = x(x+3)$.” (GOLDENBERG; CUOCO, 1998, p. 360, tradução minha) A ideia de função matemática está na forma como uma das barras se movimenta à medida que o usuário manipula a outra. Adoto o termo *representação dinâmica de função* para designar qualquer dispositivo que demonstre o mesmo princípio, como, por exemplo, o que aparece na atividade *Como b de-*

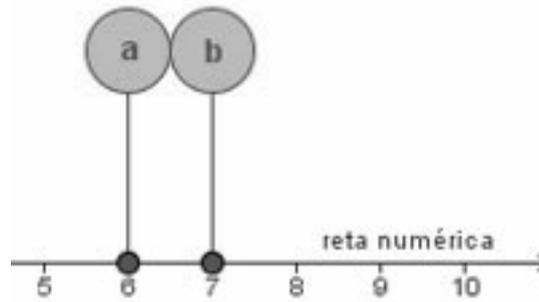


Figura 2: Atividade *Como b depende de a ?*, em que é empregado um dispositivo de representação dinâmica de função. Fonte: Bortolossi (2009).

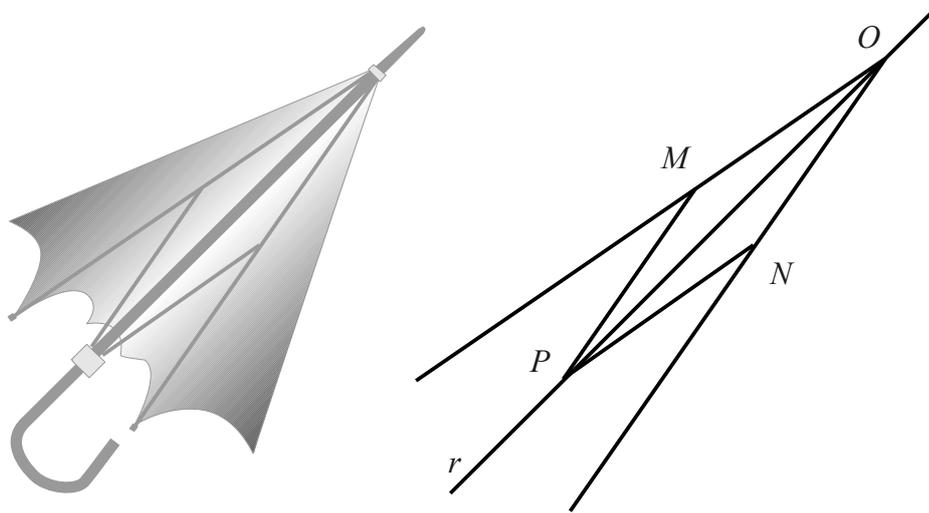


Figura 3: Guarda-chuva lado-a-lado com construção de geometria dinâmica.

pende de a ? (BORTOLOSSI; PESCO, 2009), mostrada na Figura 2. Nessa atividade, o aluno é solicitado a responder questões sobre funções com base nas posições dos balões a e b , que correspondem à variável independente e à variável dependente da função.

Em minha experiência pessoal com a geometria dinâmica, percebi certa similaridade com dispositivos mecânicos, que desde o início me intrigou e me interessou. Passei a adotar como emblema dessa ideia um guarda-chuva, pois arrastar uma construção geométrica em um programa de geometria dinâmica tem algo a ver com abrir e fechar um guarda-chuva: empurra-se um ponto, que move uma reta, que desloca uma circunferência, enfim, é uma reação em cadeia como aquela que as peças do guarda-chuva realizam. Tanto é, que é fácil montar uma construção que imita um guarda-chuva em um programa de geometria dinâmica (Figura 3). Algo menos espontâneo seria fazer o caminho inverso, isto é, usar geringonças mecânicas para estudar geo-

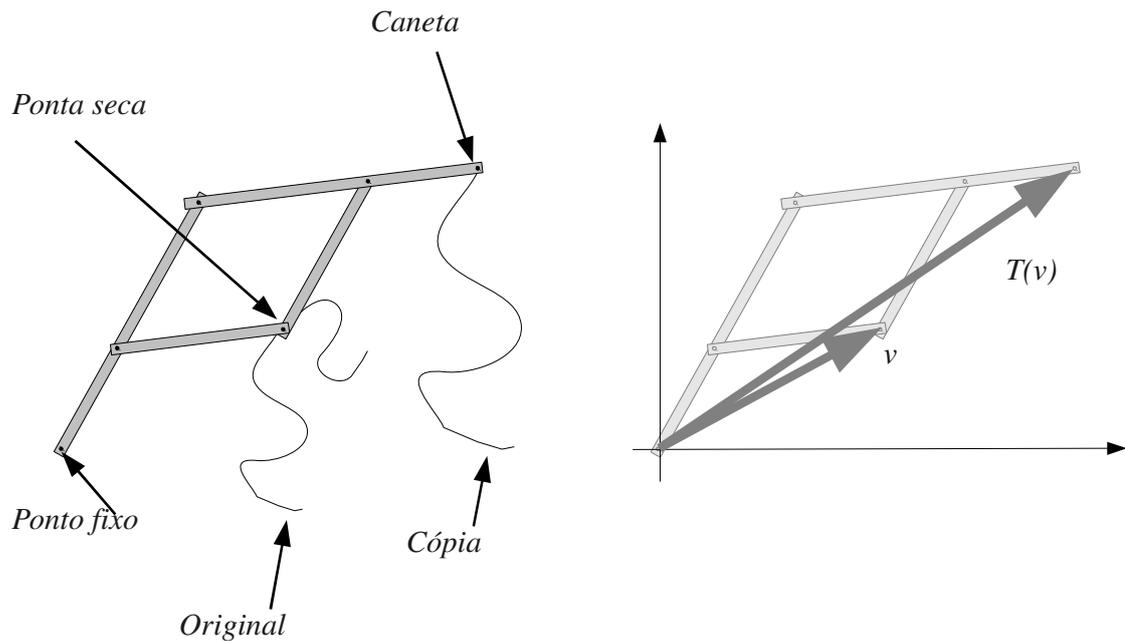


Figura 4: Utilização do pantógrafo e transformação linear sobreposta a um pantógrafo.

metria à moda da geometria dinâmica, como se fosse uma geometria dinâmica sem computador. O que me intrigava era se todas essas associações não seriam indícios de que havia uma conexão mais profunda entre geometria dinâmica e dispositivos mecânicos, como se a experiência com um influenciasse a experiência com o outro. Nada disso é novidade na literatura de geometria dinâmica: há manifestações que indicam que esse paralelo é bem conhecido, embora aparentemente uma importância marginal seja dada a ele. A seguinte passagem de Hollebrands, Laborde e Sträßer (2008, p. 167, tradução minha) é um registro disso: “Essas realidades artificiais [as construções móveis da geometria dinâmica] podem ser comparadas a entidades do mundo real. É como se os diagramas reagissem às manipulações do usuário seguindo as leis da geometria, assim como objetos materiais reagem seguindo as leis da física”.

No caso das representações dinâmicas de funções, eu não conhecia o termo nem a ideia na forma como ela foi proposta por seus idealizadores, e já tinha ideias próprias no sentido de aproveitar a experiência corporal com dispositivos do dia a dia para falar de funções matemáticas. Vou contar mais sobre isso. O primeiro caso foi a respeito de transformações lineares, um dos assuntos principais do ensino de álgebra linear, e que *é um tipo de função*. Aconteceu de eu associá-las a pantógrafos, um tipo de instrumento que desenhistas utilizam para copiar, ampliar ou reduzir mapas, ilustrações, etc. (Figura 4, lado esquerdo). Eu—digamos assim—reconheci uma transformação linear em um pantógrafo (lado direito da figura). Imediatamente eu já reconhecia outros tópicos da teoria das transformações lineares naquele mundo dos pantógrafos.

Então, despertou em mim um certo interesse didático na situação toda e eu passei a pensar no assunto de tempos em tempos. Logo ficou claro que o princípio por trás de tudo não se aplicava apenas a transformações lineares, mas a funções matemáticas em geral. Entendi que uma torneira pode servir de suporte para se falar de funções matemáticas. O comportamento que se vê numa torneira, a relação entre o ângulo de giro e a vazão d'água, pode ser descrito como uma função. Claro que é uma função trivial, mas se existisse uma torneira que se comportasse de forma complexa, então ela poderia ser usada didaticamente. Por exemplo, se o comportamento da vazão d'água for crescente no início do giro até um ponto que começa a regredir, a pessoa passa por uma experiência correspondente a reconhecer um máximo local numa função. O conceito de máximo pode se manifestar no mundo das torneiras, desde que haja torneiras devidamente projetadas para isso. A essa altura eu já havia idealizado um dispositivo similar a um DynaGraph e que hoje eu chamo de *funcionete*¹. Vários eram os conteúdos da teoria de funções matemáticas e do cálculo que ia imaginando como expressar com o recurso de funcionetes: injetividade, sobrejetividade, composição, o enunciado da definição de limite, a regra da cadeia e um método discretizado de integração de equações diferenciais. O apelo didático dessas ideias só crescia. E junto com ele uma certa intuição de estar numa esfera da experiência humana onde tudo é óbvio, isto é, não requer muitas explicações para ser depreendido. Uma torneira defeituosa que, quando se gira, vai até um ponto e começa a diminuir a vazão não é segredo para nenhum ser humano. Ele naturalmente vai girar no sentido contrário e parar a torneira no ponto de máximo. Ninguém precisa de explicação para entender isso, é como se a ideia de máximo de uma função tivesse um sentido equivalente no mundo das torneiras que fosse espontaneamente depreendido. Como no caso da geometria dinâmica, essas associações entre representações dinâmicas de funções e dispositivos da vida cotidiana não são novidade na literatura de educação matemática, embora elas pareçam figurar aí mais como meras curiosidades, e não como indício de algo que mereceria mais atenção. Goldenberg, Lewis e O'Keefe (1992, tradução minha) mencionam a ideia em diversas passagens:

A impressão de que se está operando um dispositivo físico [ao utilizar um DynaGraph] é quase inescapável. (p. 244)

Você pode *sentir* a relação entre variável e imagem [no DynaGraph], da mesma forma como você *sente* a relação entre suas ações no *dial* do rádio e a estação que sintoniza. (p. 245)

Todos começamos com representações dinâmicas de funções: as mudanças de luz e temperatura com o passar do dia, observações da agulha do relógio ou do velocímetro; a sensação de *controle* quando se gira o *dimmer* para reduzir a iluminação da sala de jantar. (p. 258)

Os autores compartilham ainda da mesma expectativa positiva acerca dos benefícios pe-

¹Pronuncia-se com o *e* fechado, rimando com *bastonete* e não com *cotonete*.

pedagógicos desta abordagem:

Queríamos partir de movimentos que os estudantes pudessem ver, sentir e descrever com recursos que lhes fossem familiares. (p. 258)

Nossa aposta [...] é que ideias matemáticas fundamentais [...] tornam-se acessíveis a alunos relativamente despreparados quando eles se encontram no contexto de puras representações dinâmicas de funções. (p. 260)

Estamos particularmente intrigados com o que parece ser uma contribuição efetiva da visualização dinâmica no planejamento e na realização de experimentos por parte dos alunos, experimentos esses que se mostram significativos para eles [...]. (p. 260)

De tudo que foi dito, das experiências, das intuições, das citações de outros pesquisadores, emergem duas categorias de questionamentos:

- Como explicar essas associações entre geometria dinâmica e guarda-chuvas, funções matemáticas e torneiras? É uma coincidência, ou existe um princípio atuando por trás de tudo?
- E quanto ao apelo pedagógico no caso de funções, ele tem fundamentos? Seria possível divisar atividades pedagógicas projetadas a partir disso?

Essa é a forma com que resumo, hoje em dia, as circunstâncias nas quais este trabalho teve início. À época, eu alternava momentos em que tudo me parecia apenas mera curiosidade e momentos em que eu queria acreditar que dali poderia sair um projeto de pesquisa. Hoje entendo que o que mais me impedia de começar algo mais sério girava em torno de questões muito fundamentais: poderia eu tomar, como objeto de estudo, experiências pessoais e introspectivas de mim próprio? Isso teria validade científica? E, principalmente, existiria uma metodologia que me permitisse fazê-lo? Muito tempo se passou até que eu me sentisse maduro para lidar com essas questões. Durante todo esse tempo, este trabalho não esteve para mim como um projeto de pesquisa. Foi nesse mesmo período que, por outros interesses, eu paulatinamente fui tomando contato com a filosofia da educação matemática, e comecei a perceber indícios de que seria possível, sim, tratar da experiência—mesmo pessoal e subjetiva—como objeto de estudo. Numa via de duas mãos, em que a filosofia fornecia subsídios para lidar com minhas questões, e elas, por sua vez, me obrigavam a interrogar mais profundamente a filosofia, teve curso um longo processo de reflexão que culminou com este trabalho. Foi ao longo desse processo que, paulatinamente, a noção de percepção veio emergindo mais e mais, até o ponto em que ela se mostrou para mim como o conceito-chave capaz de catalisar a sistematização das ideias. A tese que defendo no presente trabalho pode ser condensada da seguinte forma:

É da natureza humana uma certa capacidade de perceber comportamentos de dependências entre eventos do mundo físico—o apontamento e a caracterização disto fazem parte do trabalho. Além disso, aponto que tal tipo de percepção é decisivo para as representações dinâmicas de funções matemáticas. De forma similar, aponto outra capacidade de perceber comportamentos, desta vez, de restrições e impedimentos no mundo físico. Defendo que esse tipo de percepção é decisivo na utilização de programas de geometria dinâmica, que podem ser caracterizados, como também se faz na literatura da área, como um tipo de resolução de sistemas de restrições geométricas. Os dois tipos de percepção apontados constituem explicitações específicas de modos de atuação da percepção humana em situações de interesse da educação matemática. Por fim, amparando-me no pensamento de autores que se dedicaram à percepção, defendo que, quando um conteúdo da matemática é revestido de um sentido alegórico e, ao mesmo tempo, afeito à percepção, ele se aproxima de uma dimensão mais originária da natureza e experiência humanas, razão teórica pela qual esse tipo de representação tem uma potencial aplicação na educação matemática.

Os dois tipos de percepção só fazem sentido quando circunscritos à filosofia da educação matemática: são resultado do esforço de um educador matemático para resolver inquietações que lhe ocorrem no exercício da sua função e, assim, *dar sentido* a seu mundo. As concepções de percepção da psicologia não foram consideradas na elaboração do trabalho.

A argumentação que sustenta a tese é apresentada segundo a organização que se segue:

- De início, no Capítulo 1, é preciso estabelecer os sentidos mediante os quais a percepção se torna um momento originário da experiência humana. Essa noção emerge a partir do trabalho de filósofos identificados com a fenomenologia, que também é introduzida. Além da percepção, certa noção de *sentido* é desenvolvida. Esse capítulo concentra as fundamentações epistemológica e metodológica do trabalho.
- No Capítulo 2, reúnem-se todos os esforços do trabalho relacionados com o tema *função matemática*. Uma etapa importante é cumprida logo no começo, que consiste em delinear, na experiência cotidiana, certa capacidade de perceber dependências em eventos que ocorrem à nossa volta. Com base na epistemologia e na metodologia apresentadas no Capítulo 1, essa noção ganha um estatuto diferenciado e é o primeiro resultado do trabalho, uma parte do enunciado da tese. Além disso, é preciso trazer o sentido matemático de função para o campo perceptivo através de uma forma de alegoria, o que permite a gênese de uma abordagem pedagógica, cujos benefícios se explicam à luz de certa compreensão do papel da percepção. O capítulo contém o exemplo completo de uma abordagem pedagógica voltada para o tema das transformações lineares—um caso

especial de função—que procura explorar a percepção de dependência, incluindo discussões sobre o sentido disso. Há, ainda, uma comparação das representações dinâmicas de funções, empregadas na abordagem, com outras representações de funções.

- O Capítulo 3 trata de uma percepção diferente: a percepção de restrições ou de impedimentos. Mostra-se que ela é atuante na operação de programas de computador de geometria dinâmica. A geometria dinâmica é uma experiência que já se realiza no campo em que a percepção de restrição atua. Em um movimento contrário ao do Capítulo 2, no qual partiu-se de uma idealidade matemática para se criar uma representação no campo de percepção, aqui busca-se explicitar qual seria a idealidade matemática que é apresentada na geometria dinâmica. Chega-se, assim, à noção de sistemas de restrições geométricas, e a uma discussão sobre os efeitos das interfaces computacionais nos sentidos da matemática.
- No capítulo das Conclusões, os resultados são sumarizados e possibilidades de trabalhos futuros são discutidas.

1 Percepção e sentido

1.1 Considerações iniciais

O propósito da exposição feita no presente capítulo é reavivar a ideia de percepção desenvolvida no âmbito da fenomenologia, importante escola filosófica originada no início do século passado. A percepção foi tema de estudo da fenomenologia desde o seu princípio, nos trabalhos de seu fundador, o filósofo alemão Edmund Husserl (1859–1938). Outro fenomenólogo que, seguindo as indicações deixadas por Husserl, realizou um trabalho notável de reflexão sobre o papel da percepção na vida humana foi o filósofo francês Maurice Merleau-Ponty (1908–1961). A apresentação feita aqui gravita em torno de tópicos centrais do pensamento desses dois autores.

Em vez de uma exposição técnica e fidedigna aos textos dos filósofos, faço uma reconstrução pessoal dos sentidos tal como os compreendi, correndo o risco, inclusive, de cometer imprecisões. O que importa para mim, no final, é apresentar ao leitor o estágio da reflexão filosófica em que eu me encontrava quando fechei a ideia da tese. Portanto, não se trata de uma revisão bibliográfica propriamente dita, visto que há formulações autorais minhas inseridas na apresentação das ideias dos filósofos. A condição de iniciante, contudo, não impede que esta reflexão cumpra o importante papel de dar relevo a questões de base, no âmbito da epistemologia e da metodologia, estabelecendo marcos referenciais para o desenvolvimento da tese nos capítulos que se sucedem.

Um primeiro aspecto que merece ser salientado no tocante a uma metodologia de estudo sobre a percepção é o *ponto de vista*. Nas neurociências e na psicologia, por exemplo, é comum adotar um ponto de vista *em terceira pessoa*, isto é, a percepção é abordada como uma coisa, um objeto, algo que está *ali à frente* esperando para ser encontrado e conhecido. Em filosofia, por outro lado, é também possível adotar um ponto de vista *em primeira pessoa*: se o processo cognitivo como um todo é um emaranhado complexo de eventos e sinais envolvendo bilhões de neurônios, o filósofo, assim como qualquer ser humano, tem o privilégio de poder conhecer o efeito desse processo *por dentro*: todo o mundo em que ele se insere, suas cores, seus

sabores, seus sentidos e seus contextos, na forma como se apresentam a ele, são o processo cognitivo, vivido! Com assento em sua própria experiência, o filósofo se põe a investigá-la. Essa é uma característica marcante da metodologia que se pretende seguir neste trabalho. Contudo, tal metodologia não deve ser compreendida como um simples tipo de *introspecção*. Não se trata de descrever a experiência como ela se apresenta à primeira vista, mas de buscar uma devida orientação para abordá-la, mediante a qual uma compreensão mais profunda de seus mecanismos se revela. As experiências perceptivas, inclusive as mais banais, mobilizam muito mais recursos cognitivos do que aparentam. Mas, de que se tratam mesmo esses *recursos cognitivos* em uma metodologia de pesquisa em primeira pessoa? O assunto deixa de ser metodologia e passa ao campo da epistemologia: de que se constitui o que sabemos e como o sabemos? Nessa campo, a descoberta mais notável é surpreendentemente óbvia: não podemos saber das coisas, mas apenas dos efeitos das coisas em nós! Se somos insensíveis a um aspecto daquilo que abordamos, tal aspecto nem existe para nós. Encurta-se a distância entre experiência e seus efeitos: a experiência é o efeito. Portanto, a estrutura da percepção se revela nos diferentes efeitos que são passíveis de se delinear e nomear. E, ao voltar a atenção para os próprios efeitos de suas experiências perceptivas, o filósofo tematiza elementos que não costumam ser reconhecidos. Esses personagens anônimos da cognição são sua mais absoluta constituição: encontrá-los, delinear-los e lançar-lhes luzes são os objetivos últimos de uma metodologia descritiva dos estados de ser em primeira pessoa.

A primeira etapa a ser realizada na apresentação das ideias reunidas neste capítulo é justamente discutir os efeitos da experiência de um ponto de vista em primeira pessoa, e isso é feito na Seção 1.2, em que tais efeitos aparecem sob a designação de *sentidos*. Trata-se da seção escrita de forma mais livre e autoral de todas, sem o intuito de fundamentar as ideias em autores reconhecidos, mas colocar em curso a reflexão. Qual a relação entre uma metodologia como a que é caracterizada nestas considerações iniciais e a fenomenologia? Essa é uma importante questão, pois se fosse possível estabelecer uma conexão entre elas, então poder-se-ia classificar este trabalho como fenomenológico. Porém, tal fundamentação não é construída com rigor. Em vez disso, pistas e vestígios são parcialmente esboçados ao longo do trabalho. Na Seção 1.3, por exemplo, abordo a fenomenologia, interessado, especialmente, em explicitar idéias sobre modos de a fenomenologia ver certos temas. Na Seção 1.4, sigo os passos de Merleau-Ponty em sua *Fenomenologia da percepção*, apresentando umas poucas, entre tantas, *inversões copernicanas* que o filósofo mostrou na obra, de modo a reveter certos enganos a respeito da percepção e a entender o papel fundamental que ela desempenha em nossa existência: muitos dos sentidos que nos são muito próximos são originados e sustentados por nossa percepção. Nas considerações finais, discuto *subjetividade, objetividade e experiência pré-predicativa*.

1.2 Sentido

A meta principal que pretendo alcançar nesta seção é chamar a atenção para as formas como tudo o que nos acontece na experiência nos afeta; é um campo total de impressões, percepções, sensações, sentimentos, emoções, angústias, humores, significações que são repetidamente disparados pela presença ou pela ocorrência de objetos, palavras, situações, etc. A essa quase inexpressável noção, eu associo a palavra *sentido*. Não que essa ideia seja o significado usual que se atribui a *sentido*: todos os significados das palavras *sentido*, *significado*, etc. devem ser colocados em suspensão durante a leitura desta seção, para que a ideia proposta venha à tona—palavras têm íntima ligação com sentidos, por isso, naturalmente, elas conseguiram um lugar de destaque nessa discussão. A palavra *sentido* ganha uma nova significação aqui, um desvio em relação ao que se está acostumado, porém essa escolha não foi fortuita: por algum motivo, a ideia proposta se encaixaria muito bem em algumas sentenças formuladas corriqueiramente com a palavra *sentido*, mas nem sempre necessariamente.

A chave para a acepção que proponho é associar a palavra *sentido* ao particípio do verbo *sentir*. A formação do particípio a partir do infinitivo do verbo tem um sentido para os falantes da língua. O particípio indica o efeito ou resultado da ação do verbo: *achado* é efeito de *achar*, *pedido*, de *pedir* e assim por diante. *Sentido*, portanto, é o efeito ou resultado de *sentir*, isto é, aquilo que se sente ou se sentiu. Isso evoca sentidos próximos, como *sentimento* e *sensação*. Sempre emprego *sentido* com a intenção de referir-me a uma vivência, ou experiência. O *sentido de uma experiência* são todos sentimentos, sensações, impressões, estados internos, etc. que se sentem durante a experiência, ou imediatamente após, quando ainda se está sob o efeito dela, ou quando se consegue revivê-la por memória. Por exemplo, a imagem mostrada na Figura 5 pode ser vivenciada de formas diferentes: cada uma delas desperta um sentido próprio. Há uma forte tendência de que a vivência dessa imagem seja dominada por mobilizações internas ligadas à apreensão do espaço e, portanto, da geometria. Seria possível ver na imagem apenas um conjunto plano de segmentos que se cruzam. Ou, então, um volume. E, como volume, há pelo menos duas soluções possíveis para a apreensão da imagem (Figura 6). São vários sentidos diferentes e excludentes: um deles monopoliza a vivência e se torna o sentido dominante para uma pessoa. Em um grupo de pessoas, é possível que nem todas concordem a respeito da imagem. Aliás, a ambiguidade da imagem, assim apontada, pode muito bem se fazer sentir e ser um componente marcante do sentido da vivência. Mudando de exemplo, na pergunta “qual é o sentido que a história de *Romeu e Julieta* tem para você?”, a palavra *sentido* acata o sentido proposto aqui. Ouvir uma história é uma experiência e, portanto, ela é *sentida*. Novamente, o sentido da história é o conjunto total de impressões, sensações, movimentos de

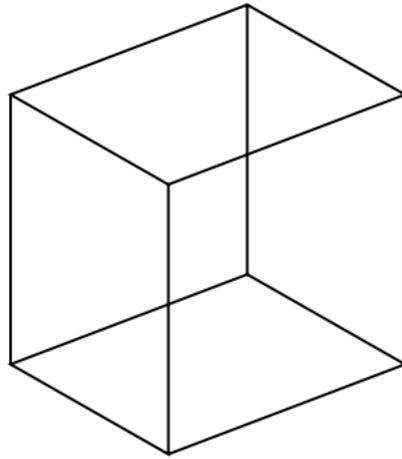


Figura 5: O cubo de Necker, uma imagem com múltiplos sentidos.

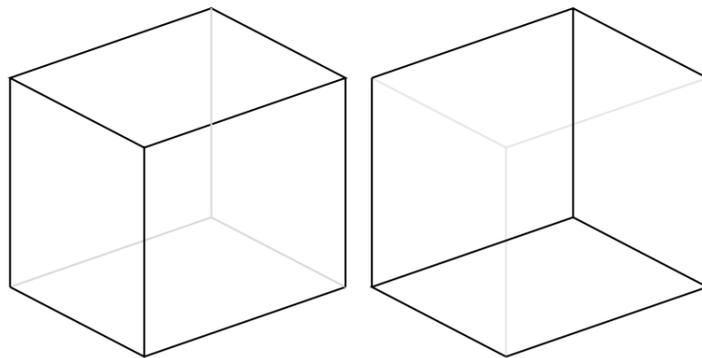


Figura 6: Dois sentidos volumétricos para a imagem da Figura 5.

estados internos, etc. provocados pela experiência de ouvir a história. Essa ideia combinou com o uso corriqueiro que se faz de *sentido de uma história*, embora não implique que seja exatamente o mesmo. Novamente repito: os sentidos consagrados pelo uso precisam ser postos em suspensão, por enquanto, porque senão interferem no processo de construção de um sentido que está em curso: *o sentido de 'sentido'*. Nenhum exemplo é mais vivo que a experiência com nomes próprios. Se alguém conhece duas pessoas que têm o mesmo nome, embora ele venha a pronunciar os mesmos sons—ou escrever as mesmas letras—para referir-se a uma ou a outra, para ele é como se fossem experiências totalmente diferentes. O sentido, aí, é a pessoa como um todo, e ele é tão forte que nem se nota que *o mesmo nome* está sendo articulado. Dois xarás que estão no mesmo ambiente, ao ouvirem seu nome comum ser chamado, ouvem-no como se cada um deles fosse o alvo da mensagem. No entanto, quando a situação se elucida e o verdadeiro alvo é reconhecido, o outro homônimo vive uma experiência em que aquela atmosfera se dissipa e a frase recém-ouvida muda de sentido instantaneamente. Em uma outra situação, se um dos homônimos precisa chamar o outro, ao pronunciar o próprio nome referindo-se ao xará, ele lhe aparenta estranho, estrangeiro, diferente: é um outro *sentido*.

As palavras são um tópico à parte na discussão dos sentidos. Se sentidos referem-se a vivências, como é possível falar de sentido das palavras? A chave é entender que palavras proporcionam vivências: vivências de significações. Uma palavra é um signo, um sinal, isto é, uma coisa que aponta para outra coisa. O nome de uma pessoa aponta para a pessoa, a palavra *lápiz* aponta para o objeto usado para escrever. *Significar* é o ato de apontar, *significado* é, outra vez, o particípio do verbo significar, ou seja, o efeito da ação de significar, enfim, a coisa apontada. A vivência de significação inclui tudo: a palavra como signo, o ato de apontar, e o efeito final, em que só resta a coisa apontada—*o significado*. *Sentido* e *significado* deixam de ser sinônimos e se mostram em sutis superposições. É preciso ter cuidado nessas manipulações dos sentidos de *sentido* e *significado*, pois não há uma única forma de combiná-los. A primeira alternativa é aquela em que se considera que nem tudo que tem sentido tem significado. Segundo essa orientação, não caberia falar no *significado de uma história*, pois uma história não é um signo, ela não foi feita para apontar outra, mesmo quando quer evocar uma lição de moral. A relação entre uma história e aquilo a que ela remete não é exatamente igual à relação entre um signo e aquilo que ele aponta. No caso da história, é mais fácil pensar que ela tem um sentido, uma vez que à história está associada uma experiência, e tudo aquilo a que a história remete faz parte desse sentido: a história tem sentido, mas não significado. Ainda nessa linha, um signo tem sentido e significado, e o sentido do signo reporta à experiência da significação. A segunda alternativa para encaixar os sentidos de *sentido* e *significado*, que não é complementar à anterior, é considerar que significações somente podem apontar vivências e, portanto, sentidos.

A palavra *lápiz* aponta para a experiência do lápis, que, por sua vez, suscita um sentido. Não é o caso de indicar qual é a melhor entre as alternativas propostas, mesmo que houvesse outras, pois há situações em que cada uma se mostra mais conveniente.¹

Manipulando palavras, conhece-se a natureza dos sentidos. As palavras, enquanto portadoras de sentidos, são um meio de exploração do diáfano e massivo mundo dos sentidos. E o que se vê aí? Que sentidos se dão como emaranhados: todo sentido tem uma insistente mania de grudar em outros; que, em cada palavra, superpõem-se e coabitam diversos sentidos—o hábito de consultar dicionários e enciclopédias há muito tirou a novidade disso—; que sentidos mudam, transformam-se, adaptam-se, evoluem, e pelos mais diversos motivos: o uso prático da língua, a demanda por exprimir um mundo em transformação, etc. A criação de palavras por processos que possuem um sentido conhecido pelos falantes da língua é muito revelador. Já recorri duas vezes ao processo de formação do particípio a partir do infinitivo como meio para explicitar ou construir sentidos. E há muitos outros processos: por exemplo, a concatenação, ou junção, de palavras por prefixação ou sufixação. A palavra *prejuízo* traz o prefixo *pre-*, que indica o sentido de algo “anterior a”, ou seja, *prejuízo* designa um juízo—um julgamento, uma avaliação—em formação, que ainda não se completou, precário. Esse é o sentido em que é empregado na literatura de filosofia. Mas não é esse o sentido preferencial no uso prático da língua: *prejuízo* é uma perda ou dano. Os dois sentidos parecem completamente dissociados. São duas experiências distintas.² Os sentidos que vêm da derivação etimológica podem ser surpreendentes. *Qualidade* é a propriedade do *qual*; *música* é coisa de Musa (seres mitológicos a quem os antigos atribuíam a inspiração dos poetas, músicos, historiadores, etc.), isto é, uma coisa inspirada, criativa; *relevância* é o aspecto do relevo; *doutrina* tem a ver com doutor, e

¹Como se pode depreender do final do parágrafo, não estou empenhado em encontrar uma resposta final para a relação entre *sentido* e *significado*. Mas, como essa é uma questão sensível para a comunidade de educação matemática, esclareço o critério que adoto ao empregar essas palavras ao longo do trabalho. Sempre há *sentido*, essa noção é absoluta nesse trabalho; contudo, em situações específicas, o sentido vem através de uma *significação*. Portanto, quando falo em *significado*, refiro-me a uma situação mais particular, mas que também proporciona um *sentido*. Para frisar: *significar* é *convencionar* ou *conotar*, isto é, estabelecer uma relação entre duas coisas: o signo (muitas vezes, uma palavra) e o significado.

²No entanto, algo curioso se revela a um falante mais atento: o segundo sentido pode ter sido uma evolução direta do primeiro, pois uma “avaliação precária” de uma situação bem pode resultar em um fracasso na ação e, portanto, em perda ou dano. Essa especulação, que tem um forte apelo de explicação (pois ela explicita o surgimento do sentido, a sua gênese, daí poderia ser chamada de uma explicação *genética*; eu adoto preferencialmente a formulação *explicação genealógica*, pois considero que ela enfatiza mais o aspecto histórico da gênese), passa a integrar a experiência da palavra *prejuízo*, quer ela tenha fundamentação histórica ou não. Realmente, muitas explicações etimológicas que existem por aí foram obtidas por deduções como esta e não condizem com o que de fato aconteceu. Já testemunhei, infelizmente, mais de uma vez, em palestras de educação, a menção de que a palavra *aluno* tem origem na combinação de *a-* e *lumno*, quer dizer, “sem luz”, resultando no sentido tenebroso de que um aluno é alguém vazio que precisa receber uma iluminação. Essa acepção é completamente errônea. *Aluno* vem do latim *alumnus* que é uma forma nominal derivada do verbo *alĕre*, “criar, nutrir, sustentar, desenvolver, etc.” (HOUAISS; VILLAR, 2001), isto é, “o que está em desenvolvimento”. No caso de *prejuízo*, a inferência proposta anteriormente confere com um parecer transcrito por Houaiss e Villar (2001): “foi do facto de a palavra ter tomado e generalizado o sentido de ‘decisão prematura’, que surgiu o moderno [‘perda ou dano’]”.

disciplina, com discípulo. Essas significações pouco usuais são experiências de significação novas e, portanto, novos sentidos—novas sensações, novas impressões. Eles passam a integrar a rede de sentidos que existia em torno daquelas palavras e seus outros sentidos. Outra observação sobre a natureza dos sentidos que o uso das palavras revela é o importantíssimo papel que tem o contexto na formação e ativação de sentidos. No contexto social brasileiro, palavras como *inquérito* e *perícia* evocam um forte sentido jurídico e policial, enquanto, em Portugal, *inquérito* é muito usada para designar o trabalho científico. A própria composição das palavras cria um contexto especial que muda o sentido delas próprias: *um homem grande* não é necessariamente *um grande homem*.

Um aspecto de grande importância emerge da experiência com a imagem da Figura 5 e das considerações sobre o sentido das palavras. No caso da imagem, quando se tem conhecimento de seus múltiplos sentidos, é possível desfocar o sentido dominante da vivência, em favor de outro sentido pretendido. Numa fração de segundo, o sentido muda inteiramente. A pessoa participa do processo colocando-se mais receptiva em favor de um sentido determinado, que se realiza. A imagem oferece uma forma na qual encaixam-se diversos sentidos, mas a experiência polariza-se em um, possivelmente por uma escolha deliberada. Os sentidos estão virtualmente latentes na imagem. Eles a coabitam. Assim é também com as palavras. Posso evocar o sentido de *prejuízo* como julgamento precipitado, ou deslocar o foco para o sentido de perda. Posso selecionar o sentido da mesma forma que com a imagem, obtendo uma vivência de significação diferente. É uma questão de jeito... de encontrar uma *postura interna* apropriada que abre uma nova experiência, um novo sentido. Isso lembra as imagens em três dimensões embutidas em padronagens estampadas que foi moda anos atrás, popularmente conhecidas como *olho mágico* (N. E. THING ENTERPRISES, 1994): pessoas passavam longo tempo mirando-as até finalmente conseguir enxergar a imagem escondida. Ou, então, uma criança que acaba de aprender a andar de bicicleta: ela encontrou o ponto certo em que ocorre o equilíbrio do corpo e da geringonça mecânica. O que está em jogo não é um conhecimento teórico da experiência, mas uma experiência que só pode ser conhecida ao se vivê-la, pela obtenção da exata postura. Só é possível focalizar certo cubo na Figura 5, engajando-se na própria ação de vê-lo, assim como só é possível focalizar uma significação de uma palavra, engajando-se na própria experiência de significação. O exemplo maior é esta própria seção: toda ela é um grande esforço para, justamente, criar um novo foco de sentido para a palavra *sentido*, um foco que se alcança pensando na palavra como particípio, isto é, como *o que se sente*. Ele precisa ser vivenciado: cada passagem e cada explanação contribui com mais elementos para que esta vivência seja alcançada. A mente parece querer dar um nó: o falar de uma coisa é a própria coisa, ou, dito de outra maneira, a mão que aponta só pode apontar para si mesma. É preciso estar alerta para essas confusões,

porque este é o terreno das formulações recorrentes e dos paradoxos: como seria possível falar no *sentido de 'sentido'*? Ora, pressupõe-se que a coisa seja, ao mesmo tempo, conhecida e não conhecida: parece conhecida pela parte inicial da locução (*sentido de*); parece desconhecida pela parte terminal (*'sentido'*). Essa não é a única situação desse gênero neste capítulo.

Questões gramaticais proporcionam boas oportunidades para exercitar a noção de sentido. Muitos erros de gramática têm sua origem em confusões de sentidos. Proponho uma experiência, realizada em torno da palavra *você*. Costuma-se vivê-la, isto é, *sentí-la*, como um pronome de segunda pessoa, um pronome usado para fazer referência a uma pessoa *com* quem se está falando. Mas é possível desviar o foco de sentido para um sentido de terceira pessoa, isto é, o de alguém *de* quem se está falando, o que torna a conjugação verbal coerente. A fala a seguir é fictícia, ela registra uma situação hipotética em que alguém se dirige a outra pessoa, tratando-lhe pelo pronome *vós*. Paulatinamente, ela faz brotar o pronome de tratamento *Vossa Mercê*, origem de *você*, que mantém um forte sentido de terceira pessoa no diálogo: “Vós me ouvis. Não só vós, mas tudo o que é vosso: vosso corpo, vossas capacidades, vossas qualidades. Vós me ouvis, assim como vossa mercê³ me ouve. Se vós me estranhais, vossa mercê me estranha. Vós e vossa mercê sois um só. Por isso falo dela—de vossa mercê—como se falasse de vós. Se Vossa Mercê me entende, é porque vós me entendeis. Vossa Mercê saberia me dizer quantos somos nesta sala, afinal?” Esse é o sentido original dos primeiros falantes, quando a conjugação em terceira pessoa *tinha um sentido*, que se perdeu e, por isso, se instalou uma confusão permanente na língua portuguesa. Em frases como “aluga-se casas” (*sic*), vivencia-se um forte sentido de indeterminação do sujeito, isto é, “alguém aluga casas”, quando, na verdade, o sentido gramatical é o da voz passiva sintética: “casas são alugadas”, daí a formação correta, “alugam-se casas”. Em, “Os Estados Unidos perdeu o jogo” (*sic*), o verbo é indevidamente conjugado no singular, mas porque o sentido dominante é de time, que fica implícito: “O time dos Estados Unidos perdeu o jogo”. No Brasil, os sentidos originais de *isto* e *isso*, *este* e *esse* se misturaram e, na prática, se perderam, tornando-se uma coisa só: houve uma fusão, ou melhor, uma confusão.⁴

O que dizer da matemática? A noção de sentido como sentir se aplicaria a ela? Sim. A expressão *pôr em evidência* foi, para mim, por longos anos, vivenciada cegamente como a experiência de abrir e fechar parênteses em expressões algébricas e, só recentemente, eu realizei o sentido original, absolutamente diferente, mas genealogicamente ligado, de *trazer para primeiro plano, fazer com que seja visto*. Esse é uma mau exemplo de sentido na matemática,

³Mercê: “disposição favorável para com alguém; benignidade, indulgência [apenas por mercê, ela se dispôs a ouvi-lo]” (HOUAISS; VILLAR, 2001).

⁴A palavra *confusão* aqui pode ser experienciada com dois sentidos diferentes: bagunça e fusão. É possível, inclusive, vivenciar um ligação *genealógica* entre elas, pois fusão é um tipo de mistura.

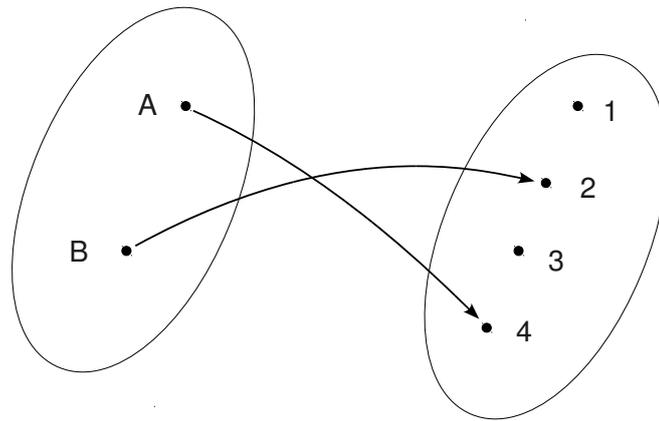


Figura 7: Função matemática como um tipo especial de correspondência entre dois conjuntos.

pois ele ainda é um exemplo com palavras, só que contextualizado na matemática. Há ainda uma série de sentidos de ordem afetiva, psicológica e emocional relativos às experiências individuais com os conteúdos matemáticos nas histórias de vida das pessoas. Falar de tais sentidos ampliaria muito o leque de possibilidades, por isso, restrinjo-me aos sentidos matemáticos dentro do próprio discurso da matemática, evidenciando sua pluralidade. Um exemplo de sentido na matemática propriamente dito é o conceito de função. Há muitos sentidos de função. Imagens como a da Figura 7 podem ser facilmente encontradas em livros de matemática elementar. Nela, se vivencia um tipo de correspondência entre dois conjuntos⁵, isto é, elementos do conjunto de origem ligam-se a elementos do conjunto de chegada. A própria terminologia revela a influência da imagem: setas, origem, chegada. É possível reconhecer a definição de função nesse contexto: nunca deixa de partir uma seta de um elemento do conjunto de origem, e nunca partem duas ou mais setas de qualquer elemento. Aqui há uma experiência de função em que prevalecem esquemas visuais: os conjuntos são áreas confinadas nas quais jazem os elementos, a função é o conjunto de setas que se lançam de um conjunto para outro, os conjuntos são discretos e finitos, etc. É uma experiência com todos esses elementos atuantes. É um *sentido* de função. Outro sentido de função—muito próximo a este, mas não exatamente igual—é aquele em que as funções são vistas como conjuntos de pares ordenados, conhecido como definição de Bourbaki:

Uma **função** é uma coleção de pares de números com a seguinte propriedade: se (a, b) e (a, c) estão na coleção, então $b = c$; em outras palavras, a coleção não pode conter dois pares diferentes com o mesmo número como primeiro

⁵“Particularizando para os números reais aproxima-se da definição de função dada por Dirichlet em 1837. (...) A definição de Dirichlet facilita a introdução dos conceitos de domínio e contra-domínio, assim como as noções de sobrejetividade e injetividade.” (SELDEN; SELDEN, 1992, p. 2, tradução minha)

elemento do par. (SPIVAK, 1994, p. 47, tradução minha)

A forma de representar a função que aparece na Figura 7 segundo essa definição seria $\{(A, 4), (B, 2)\}$. Aqui a experiência tem um sentido diferente: os conjuntos de domínio e imagem não estão tão explicitamente apresentados, não há fortes esquemas visuais, apenas uma lista de pares. Sentidos bem diferentes se mostram quando a função admite uma fórmula, por exemplo, no caso de $f(x) = x(x + 3)$. Um exemplo inicial de sentido que uma função com fórmula pode mostrar é o de ser um *processo* ou um algoritmo: tomo a abscissa, adiciono ao número três, multiplicando o resultado pelo valor original da abscissa. É a experiência de calcular o valor da função a partir de uma lei de formação, algo bem distinto dos sentidos vistos até aqui. Selden e Selden (1992, p. 4, tradução minha) enumeram esses e outros sentidos para a noção de função matemática: “Uma função pode ser vista como um conjunto de pares ordenados, uma correspondência, um gráfico, uma variável dependente, uma fórmula, uma ação, um processo ou um objeto (entidade).”. De especial interesse para este trabalho é o sentido de variável dependente, pois ele se torna dominante quando se usa representação dinâmica de funções. Nessas circunstâncias, a experiência de função é fortemente dominada por um sentido de *dependência* de uma variável em relação a outra, o que é bastante discutido ao longo de todo este trabalho. Por ora, o que pretendo fazer aqui ao trazer o caso das funções é reforçar a ideia de sentido como uma experiência cognitiva ampla. Na literatura de ensino de funções, desenvolveu-se a noção de *imagem conceitual*, justamente com o intuito de quebrar a tendência, que muitos educadores matemáticos têm, de considerar as funções como uma abstração que pode ser tratada meramente a partir de sua definição, e desconhecer certa dimensão da cognição humana, que bem se encaixaria no que eu aqui denomino como sentido. “Entender um conceito significa ter uma imagem conceitual dele. Saber uma definição de um conceito de cor não é garantia de que ele foi entendido.” (VINNER, 1992, p. 197, tradução minha) Segundo o autor, a imagem conceitual seria o alvo do processo educativo, seria preciso entender como ela se forma, e a chave para isso é, justamente, a experiência: “[a] imagem conceitual [...] é moldada pela experiência comum, pelos exemplos típicos, pelos modelos passados em aula, etc.” (p. 200). O que há de fascinante no trabalho de Vinner, é que as imagens conceituais que ele aponta não se limitam aos sentidos arquetípicos que enumerei acima, citando Selden e Selden (1992), mas inclui, principalmente, os mal-entendidos, as confusões e os enganos que se cometem em educação matemática quando se trata de funções matemáticas. A partir desse trabalho, pode-se notar que a literatura de ensino de funções tornou-se atenta à noção de que a experiência do conceito de função matemática é algo maior do que uma abordagem meramente formal revelaria, como se vê neste trecho sobre representações dinâmicas de funções:

Essas duas interpretações do conceito de função matemática—função-como-

dependência (os tipos estudados na física e na análise), e função-como-algoritmo (os tipos que [...] predominam na álgebra)—existem ao longo de toda a matemática. Juntas, os dois tipos de ferramentas [de software, incluindo os DynaGraphs] podem ajudar a desenvolver essas imagens complementares de função matemática. (GOLDENBERG; CUOCO, 1998, p. 361, tradução minha)

Toda essa discussão sobre o sentido na matemática revela como um sentido pode ser favorecido em detrimento de outro a depender da forma como o professor aborda o assunto, ou seja, a experiência não pode ser abstraída, ela está irremediavelmente ligada ao resultado do processo. Aí se enquadram as teorias da ação, da cognição situada, etc.: a proposta de entender o sentido como uma experiência total está em consonância com todas elas. É o caso particular dos instrumentos e das mídias. No âmbito da educação matemática, esse tema é discutido, por exemplo, em Borba e Villarreal (2005). Exemplos brotam por todos os lados. A mídia escrita tem suas peculiaridades, ela traz elementos da experiência visual para a experiência das palavras. Parágrafos, por exemplo, têm um sentido: em filosofia, é costume usar parágrafos que ocupam várias páginas. Para o leitor de filosofia, o sentido disso é reconhecer que um argumento ainda não terminou: ele sente como se tivesse entrado em um túnel e ainda estar dentro dele. Em outros contextos, o parágrafo ainda tem um pouco desse sentido, mas prevalece a função de uma mera quebra de monotonia visual, como se as pessoas precisassem de uma pulsação mais frenética para manterem o seu interesse na leitura. É o mesmo que acontece com a vírgula: pensada inicialmente como um marcador sintático, deturpou-se esse sentido em favor do sentido de pausa sonora, mas também de quebra na monotonia visual: se a regra exigir que mais de cinco vírgulas apareçam numa linha, desconfia-se; se uma frase se estender por mais de quatro linhas sem uma vírgula, desconfia-se. Durante a escrita deste trabalho, notei em mim um desvio de sentido no emprego do sinal de dois pontos (‘:’): geralmente eles indicam uma enumeração, um apontamento: eu tenho usado para conectar quaisquer duas frases em que a segunda seja consequência ou seja influenciada pela primeira. Quando uma frase prepara o contexto para a seguinte, não seria mesmo uma forma de apontamento? Tudo isso são sentidos da linguagem que brotam da mídia impressa e que estão definitivamente entranhados na experiência.⁶ Após semanas vendo este documento através de uma tela de sete polegadas, quando o vi em papel pela primeira vez foi uma experiência *diferente*. Voltando para o contexto da educação matemática, eu modifico a proposição de Borba e Villarreal (2005) visando aos interesses específicos deste trabalho, ao sustentar que a informática desempenha um papel de transformação e reorganização de sentidos: a geometria tem *certo sentido* quando se usa régua

⁶Que dizer das notas de rodapé? Em certas circunstâncias, elas têm o sentido de uma fala à parte, como se alguém nos puxasse de lado em uma palestra e fizesse um comentário paralelo sobre o que se passa; em outras circunstâncias, elas têm assuntos que deveriam estar no texto e, sabe-se lá por que razão, o autor decidiu colocar ali (ou aqui?).

e compasso e *outro bem distinto* quando se usa um programa de geometria dinâmica. Essa noção permeia a literatura de educação matemática, como neste exemplo, que faz menção às representações dinâmicas de funções:

Cada [esquema] coloca em primeiro plano certas propriedades das funções em detrimento das demais. Ao usar o DynaGraph, o usuário quase inescapavelmente se volta para a função no seu aspecto de comportamento. [...] Uma consequência disso é que alunos trabalhando com esse tipo de material tendem a desenvolver um vocabulário marcado por ideias de variação e transformação. (GOLDENBERG; CUOCO, 1998, p. 360).

No afã de cumprir a árdua missão de comunicar minha experiência de sentido, parto agora para o fechamento das ideias desta seção, valendo-me de uma série de imagens, que gostaria de compartilhar.

Manipular sentidos é uma experiência que me remete à experiência de montar quebra-cabeças, por várias razões: sentidos se encaixam como peças de um quebra-cabeças: o momento em que dois sentidos se mostram associados lembra o encaixar de peças. Além disso, sentidos se mostram agrupados, como pequenos trechos do quebra-cabeças que, na montagem, vão se formando. Contudo, ao contrário do que ocorre no passatempo, é muito difícil, quando se modulam sentidos, formar uma visão do todo, como acontece quando a montagem está completa: parece que o jogo dos sentidos está eternamente fadado a ser um jogo de pequenos trechos prontos, mas sem um encaixe final. O que me é mais caro nessa alegoria, entretanto, ainda não é isso, mas sim duas situações que estou para apresentar: há momentos, no jogo do quebra-cabeças, em que duas peças quase se encaixam e, aí, a gente força o encaixe e finge que está tudo bem, porque as peças eram muito parecidas, o encaixe era quase perfeito e a gente teimou que a coisa tinha de acontecer. É assim que me sinto quando tento associar a palavra *sentido* a umas outras noções muito próximas, como *senso* e *sentidos* (visão, audição, tato, olfato e paladar). *Senso* bem que poderia ser um particípio de *sentir*: dessa forma, estaria para *sentido* assim como *tinto* está para *tingido*: o *senso do ridículo* seria mais que a capacidade de se sentir ridículo, seria o próprio sentimento de estar ridículo. Por sua vez, os cinco sentidos trazem uma ideia parecida, o *sentido da visão* poderia ser não somente a capacidade de ver mas também *o que é visto*, o sentido da audição seria aquilo que se ouve. Nessa vizinhança, *sentido* combina com palavras interessantes, como *gosto*, *sabor*, *cheiro*: “o doce sabor da vitória”, “o gosto amargo da derrota”, “isto não está me cheirando bem”. Em todos esses casos, o que se quer frisar é o efeito da experiência, isto é, o que se sentiu com ela, o sentido: “o doce sentido da vitória”, “o sentido amargo da derrota”. O encaixe não é perfeito, mas é irresistível forçar a peça. Outra situação em que a alegoria do quebra-cabeça me agrada é quando eu sei que dois sentidos combinam, mas não está claro, para mim, como ocorre o encaixe. Isso acontece, por exemplo, com os sen-

tidos de *sentido e palavra*. De longe, eu vejo que as duas são fortemente solidárias—formam um *sólido*—, mas se tento focar o encaixe entre elas é como se a vista ficasse embaçada e eu só pudesse ver vultos. Aproveitando todas essas imagens com quebra-cabeças e suas peças, quero mencionar, de passagem, uma imagem parecida e relacionada que bem serviria para falar de sentidos: o móbile, aquele artefato que se pendura no teto e, por sutis efeitos do peso e da colocação das peças, desvela a experiência do equilíbrio. De forma similar, quando um novo sentido se abre ele força todo um reequilíbrio da rede de sentidos que se liga a ele.

A questão das questões: se o sentido é uma dimensão da experiência tão interna como se está propondo, afinal, como é possível que dois seres humanos compartilhem seus sentidos? Será que o vermelho que um vê é o mesmo vermelho que o outro vê? Mas, se não fosse, como a vida em sociedade se explicaria? Tudo ao nosso redor parece se resumir na busca pela comunicação de sentidos: a publicidade nos mostra isso. Na vida pessoal, na educação, na política, vence quem faz valer os seus sentidos: o bom legislador não é aquele que apenas promulga leis, mas quem consegue dar-lhes sentido no espaço público. Prosseguiremos e morreremos tentando levar adiante nossos sentidos. Toda esta seção pode ser vista como um grande esforço para compartilhar um sentido de *sentido*. E de quais recursos me valho? Palavras e descrições de experiências comuns. Palavras são palavras, o que importa são os sentidos. As palavras estarão para sempre nos assuntos dos sentidos, ainda que como intrusas. Elas ajudam muito, mas também atrapalham. *Vermelho* é uma palavra. Mas estamos falando do mesmo sentido? *Democracia* é uma palavra. Mas estamos falando do mesmo sentido? Usamos as mesmas palavras para inúmeros sentidos, bom seria se pudéssemos ter um palavra exata para cada sutil sentido que nos ocorresse. As pessoas, muitas vezes, acreditam estar concordando em seus sentidos só porque usam as mesmas palavras. As palavras não são perfeitas, é verdade, mas sem elas não seríamos quem somos. No entanto, o outro recurso que tenho usado—a descrição de experiências comuns—ajuda. Os sentidos têm grande chance de ser mais bem compartilhados quando, além de palavras, estão presentes experiências comuns. Talvez o sucesso da palavra *vermelho* resida no fato de que costumemos usá-la na presença de objetos vermelhos. Ligar ou religar uma palavra ou um sentido a uma experiência originária pela qual ambos interlocutores tenham passado é uma forma de nos mantermos próximos entre nós e em relação ao mundo. “[A verdadeira reflexão]⁷ [...] não substitui o mundo pela significação mundo.” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 9) Foram diversas experiências elementares que evoquei nesta seção: a formação do participio dos verbos, o tratamento de pessoas com o mesmo nome, as brincadeiras com imagens ambíguas—especialmente o colocar-se receptivo em favor de um determinado sentido—, as palavras ambíguas, a revelação de um novo sentido para uma velha

⁷“O verdadeiro *cogito*”, no original.

palavra, erros gramaticais, o ensino de funções, o uso de programas de computador, os quebra-cabeças, *móviles*, certas conotações de *sabor*, *gosto* e *cheiro*, etc. Minha expectativa é que elas tenham sido pistas fortes para que o leitor tenha formado um sentido mais próximo daquele que eu pretendo. Faltou mencionar um último recurso, muito importante, que ajuda no compartilhamento de sentidos⁸: a explicitação das redes de sentidos—ou de significações, como é mais comum falar—. Quando se aborda um sentido evidenciando o seu contexto e outros sentidos a ele associados, há mais chances de uma comunicação efetiva.

Por fim, quero apresentar uma imagem, ou uma experiência, que considero a melhor síntese do sentido de *sentido* que procuro mostrar: existe um campo de tudo o que pode ser visto—cores, imagens, cenários, coisas, pessoas—, assim como um campo de tudo o que pode ser ouvido—sons, texturas, sonoridades, palavras, músicas—, e outros campos de tudo o que pode ser saboreado, tocado, cheirado. Esses campos não são isolados, como bem lembra Merleau-Ponty: a mera visão do cetim aciona imediatamente o sentido da maciez do tecido, assim como o som da lenha queimando revela o grau de umidade ou de secura da madeira. A esse imenso campo associado aos cinco sentidos, quero unir também o *frio da barriga*, o *aperto do coração* e toda uma série de registros que provêm das vísceras, dos músculos e todo o corpo, e que estão muitas vezes associados a emoções, mas não somente. É como se, agora, todo o ser fosse um enorme órgão capaz de distinguir de tudo: situações, pessoas, humores, lugares, paisagens, ambientes, construções, nomes, palavras, conceitos, ideias, histórias, coisas, atitudes, interesses, argumentos, teorias, justificativas e tudo mais. Nesse imenso campo total, cada coisa que pode ser distinguida, delineada e identificada, com todos os seus atributos, é um *sentido*. É como se todo o ser fosse um imenso *fundo* sensível ao *zumbido* do mundo e que *acendesse* de uma forma diferente, conforme cada acontecimento que lhe ocorresse. Cada sentido é um padrão distinto que se mostra. Essa é a imagem que deixo no final, pois ela se é a que melhor se encaixa com a ideia perseguida ao longo de toda a seção: o sentido de *sentido* como participio de *sentir*.

Será que, após tantas imagens e associações, tornou-se possível favorecer a *postura interna* que dá um *gosto* especial à palavra *sentido*? No fundo, isso pouco importa, pois o efeito pretendido com todas essas inusitadas e audaciosas digressões é quase colateral: *estabelecer um contexto* mediante o qual o que vem a seguir se revele em seus *sentidos* mais especiais.

⁸E uma experiência que pode ser reveladora sobre a ligação entre sentidos e palavras: a experiência da *palavra na ponta da língua*. Trata-se de um sentido que já se formou, que se sabe ligado a uma palavra, mas que, pela falta da palavra, que não vem, se faz incompleto.

1.3 Introdução à fenomenologia

Falar no *sentido de 'sentido'* é um tipo de paradoxo, pois essa construção pressupõe que, ao mesmo tempo, se saiba e não se saiba o que é sentido: na primeira ocorrência, que remete à noção de *sentido de algo*, parece-se entender o que é sentido; já na segunda ocorrência, da coisa cujo sentido se quer conhecer, tudo caberia bem, menos a própria noção de sentido. É uma formulação recorrente, assim como *viver a experiência da 'experiência'*, *ver o 'fenômeno' como fenômeno*, *pensar o 'pensamento'*, etc.⁹ O exemplo por excelência de formulação recorrente é a questão ontológica, isto é, a questão do ser: o que é o ser? Essa pergunta traz em si a recorrência, basta lembrar que a palavra *é* é uma conjugação do verbo *ser*; logo, para falar do *ser*, já se exige que esteja estabelecida alguma noção do que seja o *ser*. Para tratar a questão ontológica, Heidegger¹⁰ não apenas recorreu ao método fenomenológico, que é um dos temas desta seção, como afirmou que *somente* através dele essa tarefa seria possível. Mas, por que isso? O que tem esse método de tão eficaz? O que é fenomenologia, afinal? “A fenomenologia só é acessível a um método fenomenológico”, diria Merleau-Ponty (2006, p. 2): eis novamente uma formulação recorrente, a exigir que já se saiba de antemão aquilo que se pretende saber.¹¹ A exposição da fenomenologia que se faz aqui tem como pano de fundo certa concepção de que a experiência da fenomenologia tem muito mais uma dimensão perceptiva do que racional. Isto está de acordo com a proposição de seus fundadores de que a fenomenologia não é uma teoria, mas um modo de ver. E eu acrescentaria: um modo de perceber. Inescapavelmente, essa exposição traz uma visão pessoal da doutrina. A fenomenologia poderia se resumir à *orientação fenomenológica*, isto é, uma determinada postura interna em relação ao mundo, que lhe confere um sentido todo novo em comparação com a *orientação natural*, aquela com que estamos acostumados a viver. É algo bastante similar à experiência com imagens ambíguas: num instante, o sentido é um; em seguida, ele muda completamente. Tudo consiste em operar essa mudança de postura internamente. Ler um trabalho de fenomenologia como se lê um trabalho teórico qualquer não é suficiente: o sintoma indicativo de que a orientação fenomenológica foi assumida é o engajamento efetivo nas vivências propostas pelo texto, como se as experiências relatadas no texto fossem revividas *por dentro*. Como já disse, a fenomenologia não é uma teoria, mas

⁹Razão de tantos paradoxos na lógica: se Atlas sustenta a todos, Atlas sustenta Atlas? Se uma cobra engole a si mesma pelo rabo, ela desaparece?

¹⁰Martin Heidegger (1889–1976), filósofo alemão muito influente, estudou com Husserl, aplicou a fenomenologia segundo uma vertente própria, associada à questão da existência humana, refundou a ontologia e a hermenêutica.

¹¹Uma questão que se pode colocar frente a tantas formulações recorrentes: elas apontam para uma impossibilidade de compreensão? Não, o fato é que um *sentido de 'sentido'*, um *ser 'é'*, etc. podem ser construídos a partir de um movimento de idas e vindas entre formulação e entendimento que, paulatinamente, abre os sentidos pretendidos.

um modo de ver o mundo, ou melhor, de percebê-lo. Zahavi (2003, p. 13) lembra que Husserl propõe uma descrição do mundo em primeira pessoa. Associo isso ao propósito de valorizar mais as experiências tais como elas aparecem para a consciência do que como se elas fossem objetos dos quais se fala à distância—como se faz, por exemplo, em certas vertentes da psicologia. A propósito, vale salientar que a ciência, em geral, apresenta os traços da orientação natural; há uma crença muito forte na objetividade do mundo, como se a experiência das coisas não dependesse também do próprio ser, como se as lentes que nos põem em contato com elas nos fossem absolutamente transparentes; e isso não se dá apenas em relação aos objetos, mas também em relação a outras pessoas e a nós mesmos. Fazer fenomenologia é tomar consciência dessa vida em terceira pessoa que é assumida naturalmente. A orientação fenomenológica exige um colocar-se em perspectiva, isto é, ela exige do ser cognoscente que seja consciente de seus próprios modos de conhecer—*um conhecer que se ‘conhece’*. A fenomenologia conduz, assim, por mais utópico e pretensioso que possa parecer, a uma superação da dualidade sujeito-objeto na sua raiz. O iniciante em fenomenologia viverá uma expectativa até que consiga *pegar o jeito interno* em que tal experiência acontece, e, então, finalmente ele passará a entender aquilo de que tanto se falava, assim como uma criança que acabou de aprender a se equilibrar na bicicleta. O caráter pessoal que esta apresentação traz, isto é, a ênfase com que a orientação fenomenológica é tratada como uma experiência perceptiva em detrimento de um exercício da razão, é coerente com o princípio segundo o qual deve-se favorecer as vivências em primeira pessoa. No entanto, isso torna a tarefa de expor a fenomenologia um desafio, pois o tema é remetido, dessa forma, a uma esfera de subjetividade com que não estamos acostumados a lidar na orientação objetivadora do mundo, presente corriqueiramente nas ciências, inclusive na educação matemática. Mas, é esse o desafio que está posto a qualquer tentativa de abordagem da fenomenologia, razão de incompreensões: “O inacabamento da fenomenologia e o seu andar incoativo não são signo de um fracasso, eles eram inevitáveis porque a fenomenologia tem como tarefa revelar o mistério do mundo e o mistério da razão” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 20). Apresento, nesta seção, as noções de intencionalidade (Seção 1.3.1), redução transcendental (Seção 1.3.2), ausência de pressupostos (Seção 1.3.2), e método descritivo (Seção 1.3.3), que, juntamente com a discussão sobre percepção da Seção 1.4, podem favorecer a aprendizagem da postura interna que conduz à experiência da orientação fenomenológica. Ao longo de toda essa exposição, é possível que a fenomenologia apareça como uma introspecção, uma anti-metafísica, um elogio da subjetividade; essas caracterizações são apreensões superficiais típicas de um texto curto; para todos os fins, a referência sobre fenomenologia deste trabalho é Zahavi (2003), que trata cuidadosamente das sutilezas à luz do debate atual.

1.3.1 Intencionalidade

A noção de intencionalidade é uma das bases da fenomenologia. Ela está presente na obra de Husserl desde seus primeiros trabalhos e talvez seja uma de suas maiores contribuições. Por isso, ela naturalmente se coloca no início de qualquer exposição da fenomenologia, mas bem poderia estar no final, pois é uma noção sutil, cujo sentido mais profundo escapa aos leitores apressados e desavisados. Intencionalidade é um tópico que parece banal à primeira vista: “a simplicidade da formulação básica da noção de intencionalidade engana quanto ao seu sentido mais próprio” (CASANOVA, 2009, p. 41). O problema reside no fato de que a palavra *intenção* assume múltiplos significados, e o significado dominante no uso diário não coincide com o significado original da palavra, que é o pretendido pela fenomenologia. Portanto, é preciso explicitar a experiência de significação—isto é, o sentido—que se usa em fenomenologia para a palavra *intenção*.

A etimologia diz que *intenção* “vem do verbo latino *intendo, tendi, tentum, ere*” (BICUDO, 1999, p. 18) que significa “tender em uma direção, estender, tender para, abrir, tornar atento, aumentar, sustentar, dar intensidade, afirmar com força” (GAFFIOT, 1934 apud BICUDO, 1999, p. 18). Assim, literalmente, *intenção* significa “o ato de dirigir-se a”, frisando-se que o prefixo *in-* designa algo que ocorre *por dentro*. Assim, a intenção é uma característica do pensamento, o fato de ele se ocupar de algo. Esse seria o sentido original, mas que teria sido modificado pela incorporação de uma certa noção de *vontade* ou *querer*. Quando se fala em *intenção*, hoje em dia, depreende-se um *propósito deliberado*: “minha intenção é reformar esta pia”, “a intenção dela era passar mais tempo viajando”. Esse sentido deve ser posto em suspensão quando se aborda uma apresentação da fenomenologia, pois, para ela, “intencionalidade não é um querer, não é sinônimo de propósito.”¹² Proponho uma experiência de significação para dirigir o esclarecimento do significado de *intenção* na fenomenologia e suas relações com outros significados. Ela se baseia na frase “Desculpe, eu não tive a intenção”. No sentido corrente da palavra *intenção*, esta frase pode ser recebida como “Desculpe, eu não quis fazer isso” ou “Desculpe, foi sem querer”. Mas, no sentido pretendido pela fenomenologia, que seria o sentido original, a frase é recebida como “Desculpe, eu não tinha consciência do que estava fazendo”, ou seja, “eu nem mesmo sabia”, “eu nem mesmo me ocupava mentalmente disso”. Intencionar como pensar é algo que precede um querer. É irresistível arriscar estabelecer uma conexão genealógica entre os dois sentidos: inicialmente, *intenção* era pronunciada com o sentido de “aquilo de que se tem em mente” e, paulatinamente, passou a ser ouvida como “aquilo que se quer”. Assim, a frase “minha intenção era sair”, que era inicialmente ouvida como “sair era algo que eu pensava”,

¹²Notas de uma palestra da professora Maria Bicudo e nota de rodapé em Scheffer (2002, p. 42).

passou a ser ouvida como “eu queria sair”. A razão para separar e diferenciar esses sentidos reside no fato que *nem* toda intenção leva a uma vontade, embora toda vontade parta de uma intenção. Enquanto escrevo este texto, ao meu lado está uma cadeira; o simples fato de eu estar consciente dela, de saber o que ela é, onde ela está, enfim, de poder pensar a cadeira é um sintoma de minha *intenção* da cadeira. Não é preciso que haja planos, interesses e vontades em relação à cadeira para se falar em intenção.

Um tópico relevante que emerge nesta discussão é o sentido de *consciência*, que também pode ser um dos mais difíceis. Mas, em fenomenologia, ele gira em torno justamente da noção de intencionalidade. Na experiência de significação proposta em torno da frase “Desculpe, eu não tive a intenção”, as palavras *intenção* e *consciência* aparecem como sinônimos: “eu não tive a intenção”, “eu não tive a consciência”. “Para a fenomenologia, a consciência é intencionalidade. É o próprio ato de estar-se atento a, dirigido para...” (BICUDO, 1999, p. 17). Surge nesse contexto o sentido de *objeto de consciência*, isto é, aquilo do qual a consciência se ocupa, para o qual ela se volta. Na seguinte passagem de Casanova (2009, p. 41), os sentidos de *intencionalidade*, *consciência* e *objetos de consciência* aparecem ligados fortemente, revelando como cada um é necessário para entender os demais: “Intencionalidade é um termo que descreve fundamentalmente o fato de nunca se possuir uma consciência sem objetos de consciência, o fato de toda consciência ser necessariamente ‘consciência de’ e de toda consciência trazer consigo, deste modo, o seu objeto”. Os objetos de consciência parecem ser, dos três sentidos, o mais palpável:

Em sua análise da estrutura da experiência, Husserl dá atenção particular a um grupo de experiências que são caracterizadas por ser conscientes *de* algo, isto é, de estar *dirigidas* a objetos. Esse atributo é também chamado de *intencionalidade*. Não apenas se ama, teme, vê ou julga, ama-se o amado, teme-se o temerário, vê-se um objeto e julga-se um estado de coisas. Não importa se estejamos falando de percepção, pensamento, julgamento, fantasia, dúvida, expectativa ou lembranças, todas essas formas diversas de consciência são caracterizadas por se intencionar objetos e não podem ser analisadas apropriadamente sem um olhar para seus correlatos objetivos, isto é, os objetos percebidos, interrogados, esperados. (ZAHAVI, 2003, p. 14, tradução minha)

Mas esses objetos de consciência de que se fala não são o que parecem à primeira vista:

Em contraste com as assim chamadas relações naturais, a intencionalidade é caracterizada pelo fato de que ela não pressupõe a existência de ambos elementos da relação (razão pela qual é melhor não chamar a intencionalidade de relação). Se A influencia B causalmente, tanto A quanto B devem existir; se A intenciona B, apenas A deve existir. Se é verdade que estou sentado em um cavalo, tanto eu quanto o cavalo devemos existir. Se é verdade que eu intenciono um cavalo, o cavalo não precisa existir. Assim, um importante aspecto

da intencionalidade é exatamente sua *independência de existência*. Nunca é a existência do objeto intencional que torna o ato—seja uma percepção ou uma alucinação—intencional. Nossa mente não se torna intencional através de uma influência externa, nem perde sua intencionalidade se o objeto deixa de existir. Intencionalidade não é uma relação externa que é trazida à tona quando a consciência é influenciada por um objeto, mas é, ao contrário, uma característica intrínseca da consciência. (ZAHAVI, 2003, p. 20–21, tradução minha)

É importante destacar que o objeto a que se está referindo aqui não é o objeto físico, mas a experiência do objeto na consciência. Isso exime a fenomenologia de qualquer compromisso metafísico. Essa cadeira que eu vejo ao meu lado não é a cadeira real, eu nada sei sobre a cadeira real, tudo o que eu tenho é a cadeira que se abre em minha consciência. Dela eu posso falar. No início, a fenomenologia pretendia ser um discurso sobre experiências da consciência, e apenas isso. Essa discussão remete à ausência de pressupostos na fenomenologia, que é aprofundada na Seção 1.3.2. Cabe frisar que não apenas objetos físicos se desdobram em objetos de consciência, mas há aqueles objetos que são da consciência por natureza: imagens mentais, fantasias, emoções, pensamentos, sentimentos, etc. Esse é só o princípio da sofisticada descrição da paisagem da consciência que Husserl empreende a partir da noção de intencionalidade—nem sequer esboçada aqui—, e na qual aparece uma determinada noção de *sentido*.

É o sentido que provê à consciência a sua direcionalidade a objetos [intencionalidade] [...]. Mais especificamente, [o sentido] não só determina qual objeto é intencionado, mas *como* o objeto é apreendido ou concebido. Assim, é costume falar de ‘relações’ intencionais como sendo dependentes de concepções. Não se toma consciência simplesmente de um objeto, toma-se consciência de um objeto de uma determinada forma, isto é, estar intencionalmente dirigido a alguma coisa é intencionar a coisa *como* coisa. Intenciona-se (percebe-se, julga-se, imagina-se) um objeto *como* algo, isto é, sob certa concepção, descrição ou de uma certa perspectiva. (ZAHAVI, 2003, p. 23–24, tradução minha)

Muitas de nossas intenções são *sentidos prévios* da experiência. O fato de ter aprendido a usar uma caneta e o exercício dessa ação repetidamente ao longo da vida criam em mim uma intenção do objeto caneta, que se realiza toda vez que uso novamente uma caneta. Isso não quer dizer que a caneta não possa servir a outras intenções, como, por exemplo, para pegar uma moeda que caiu num buraco. Nesse caso, a caneta deixa de ser o objeto de costume—isto é, a intenção usual se perde—para ganhar um nova função—uma nova intenção—. Neste contexto, *sentido* e *intenção* aparecem como sinônimos. Esse caráter de multiplicidade de intenções e sentidos que se manifesta na consciência já pode ser observado desde experiências muito básicas como as da percepção visual. No caso da experiência do cubo de Necker (Figura 5), que é uma imagem ambígua, há pelo menos dois sentidos volumétricos possíveis. Cada coisa

se apresenta através de *modos de doação*, e cada modo de doação através do qual a coisa se apresenta à consciência revela uma intenção diferente.

1.3.2 Redução transcendental e ausência de pressupostos

Vivemos nossas intenções como se elas fossem as próprias coisas, e como se outras intenções para a mesma coisa não fossem possíveis. Uma intenção geralmente prevalece em detrimento de outras. Ela assume a condição da própria coisa na consciência, eclipsando as demais. Isso é razão de dificuldades, de juízos prontos, de um fechamento para o mundo. O *sentido prévio* da coisa que trago em mim é um *já sei*. Vivemos as experiências como algo absoluto, esquecendo-nos das condições que fazem-nas serem o que são, inclusive nossos próprios modos de ser, de nossa própria intencionalidade. Isso gera, ao mesmo tempo, uma entrega e um esquecimento. Um filme pode ter o efeito de um encantamento, fazendo uma pessoa viver as emoções e angústias dos personagens como se fossem dela. E, no entanto, em filmes muito fortes, a lembrança de que “está vendo um filme” tira a pessoa daquele efeito e faz amenizar a tensão. O espectador estava *entregue* ao filme e, ao mesmo tempo, estava *esquecido* de que era apenas um filme. Em sonhos, também é possível ser resgatado por uma recordação. Há um tipo similar de encantamento que acompanha o ser humano no dia-a-dia, em todas as suas vivências. Numa sala cuja luminosidade natural fosse totalmente azul, uma bola branca pareceria azul: enquanto alguém está ali com a bola, *nem se lembra* dessas coisas, e vivencia a bola azul em sua plenitude, sem jamais sequer desconfiar que precisaria questionar a cor da bola; para ele a bola seria *intencionalmente* azul. Esse encantamento é a medida de quanto estamos *imersos* na experiência sem nos darmos conta disso, assim como um peixe no aquário: “Nada nos é mais ‘familiar’ que nossa própria experiência, e nada é mais perto de nós. [...] [Porém,] a grande familiaridade de nossa experiência a esconde de nós. Como os óculos para nossos olhos, nossa experiência segue silenciosa e despercebidamente assumida, não tematizada.” (IHDE, 2007, p. 17, tradução minha). Quanto mais próxima e familiar a experiência, maior é o envolvimento com ela. Esse é o caso, por exemplo, da percepção, como se depreende nesta passagem de Merleau-Ponty (2004, p. 1–2):

O mundo de percepção, isto é, o mundo que nos é revelado por nossos sentidos e pela experiência da vida, parece-nos à primeira vista o que melhor conhecemos, já que não são necessários instrumentos nem cálculos para ter acesso a ele e, aparentemente, basta-nos abrir os olhos e nos deixarmos viver para nele penetrar. Contudo, isso não passa de uma falsa aparência. Eu gostaria de mostrar [...] que esse mundo é em grande medida ignorado por nós enquanto permanecemos numa postura prática ou utilitária, que foram necessários muito tempo, esforços e cultura para desnudá-lo e que um dos méritos da arte e do pensamento modernos (entendendo por modernos a arte e o pensamento [do

final do século XIX para cá]) é o de fazer-nos redescobrir esse mundo em que vivemos mas que somos sempre tentados a esquecer.

Pensamento moderno, neste trecho, é a fenomenologia. O filósofo usa o termo *esquecer* na sua formulação. Sobre a experiência de esquecimento da própria contribuição na experiência, vale a pena associá-la a uma situação análoga, na linguagem, que é a *catacrese*, uma metáfora que, de tão usada, se esquece que é metáfora. O trecho a seguir foi retirado da entrada para *catacrese* em Houaiss e Villar (2001): “metáfora já absorvida no uso comum da língua, de emprego tão corrente que não é mais tomada como [uma metáfora], e que serve para suprir a falta de uma palavra específica que designe determinada coisa; abuso (p. ex.: *braços* de poltrona; *cair* num logro; *dentes* de serrote; *nariz* do avião; *pescoço* de garrafa; virar um vaso de *cabeça* para baixo etc.)”.

Mas, se é do ser humano um profundo envolvimento com seu mundo, como seria possível, para ele, superá-lo? O método de ensino de desenho proposto por Edwards (1984) tem como princípio que a causa das dificuldades para o desenho está em uma intenção marcada pelo predomínio de um processamento mental simbólico. O desenhista assim caracterizado, ao se defrontar com a tarefa de desenhar um rosto, impõe sobre o ato de ver toda uma série de esquemas simbólicos pré-estabelecidos, particionando o rosto e fazendo prevalecer relações entre as partes. Ele *vê* olhos, nariz, boca, bochechas, queixo, cabelo e pescoço, e busca, no desenho, representar esses conceitos. Ele desenha as partes como as entende e as dispõe segundo as relações que tem em mente. Um artista não faz assim: frente ao mesmo rosto, ele busca outra experiência de *ver*: o que lhe interessa são formas, traços, luzes, sombras, cores. Portanto, a habilidade para o desenho estaria menos na coordenação motora para manejar o lápis do que em uma forma de olhar. O método de ensino de desenho consiste principalmente em técnicas que favorecem o desenhista a quebrar as intenções que estão arraigadas a sua experiência, os modos de ver, abrindo-o a novas intenções, novos pontos de vista. Elas podem ser espantosamente simples, como desenhar uma fotografia olhando-a de cabeça para baixo. Essa simples ação rompe de imediato com todos as intenções prévias e passa-se a ver a imagem como um conjunto de linhas, sombras, cores, formas. A autora menciona que esta técnica é usada, inclusive, por falsificadores de assinaturas, que, olhando a assinatura de cabeça para baixo, perdem as intenções das letras. Outra técnica consiste em desenhar uma forma mirando o espaço que a contorna e não a forma em si. Ao olhar uma cadeira, não se deve visar à cadeira, mas ao espaço que a circunda. Embora o contorno a ser traçado seja o mesmo que seria feito mirando a cadeira, a intenção de *cadeira* se perde. É fascinante ver os resultados dos alunos que a autora apresenta: contornos de cadeiras ganham um realismo admirável.

A fenomenologia vai em busca de um *afastamento* do mundo, de uma *distância*, que o torna

imotivado e irreconhecível, mas, a partir da qual, justamente o envolvimento e o engajamento anteriores se revelam como nunca antes. Suspendem-se crenças para, acima de tudo, conhecê-las. A reflexão—de *reflexo* e de *espelho*—quer *ver o que é ver por se ver vendo, sentir o que é sentir por se sentir sentindo, perceber o que é perceber por se perceber percebendo, pensar o que é pensar por se pensar pensando* e assim por diante.

É porque somos do começo ao fim relação ao mundo que a única maneira, para nós, de apercebermo-nos disso é suspender este movimento, recusar-lhe nossa cumplicidade [...], ou ainda colocá-lo fora do jogo. Não porque se renuncie às certezas do senso comum e da [orientação] natural—elas são, ao contrário, o tema constante da filosofia—, mas porque, justamente enquanto pressupostos de todo pensamento, elas são “evidentes”, passam despercebidas e porque, para despertá-las e fazê-las aparecer, precisamos abster-nos delas por um instante. [...] A reflexão [...] distende os fios intencionais que nos ligam ao mundo para fazê-los aparecer, ela só é consciência do mundo porque o revela como estranho e paradoxal. (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 10)

Assim, por exemplo, no caso das imagens ambíguas, como o cubo de Necker (Figura 5, p. 24), o que de mais importante se revela na reflexão é a percepção visual humana e sua propensão a querer buscar certos sentidos na presença de traços com determinadas configurações. A ambiguidade não é da imagem em si, a imagem é apenas um conjunto de traços, a ambiguidade está no ser que vê. Esse movimento de colocar-se fora da experiência, suspendendo-a, para conhecê-la, como se, ao mesmo tempo, a vivenciasse de dentro e de fora, é conhecido por *redução transcendental*¹³ e a posição *de fora*, como *eu transcendental*. Este voltar-se para si mesmo que preconiza a fenomenologia não é algo estranho a outras correntes de pensamento. Na gênese do método de desenho de Edwards (1984), por exemplo, há o relato de algo do gênero: “[...] comecei um processo de introspecção, observando-me enquanto desenhava, tentando descobrir o que eu fazia quando experimentava aquela maneira diferente de ver.” (p. 8). A autora traz citações interessantes: “Segundo os psicólogos, muitos indivíduos parecem ser capazes de ‘se porem de lado’ e perceberem as variações do seu estado mental, como se estivessem observando o funcionamento do próprio cérebro.” (p. 55). Citando Charles T. Tart, em *Putting the pieces together*, “Muitas das disciplinas meditativas adotam a noção de que... possuímos (ou podemos desenvolver) um observador altamente objetivo em relação à personalidade comum. Como esse observador é essencialmente atenção pura/percepção, não tem características próprias.” (p. 55).

Durante a redução, estes *atos psíquicos* que se revelam são chamados de *noeses*, e suas

¹³O termo foi cunhado por Husserl. A palavra *transcendental*, infelizmente, tem outros sentidos consagrados, como aquele estabelecido por Kant, mas que precisam ser postos de lado para que o sentido fenomenológico seja entendido: “[o] transcendental de Husserl não é o de Kant [...]” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 10).

contra-partes, os objetos de que eles se ocupam, de *noemas*.¹⁴ Há uma tendência em confundir noemas com objetos do mundo físico: o verbete de *noema* em Houaiss e Villar (2001) permite essa confusão por parte de um leitor desavisado: “o objeto visado pela consciência humana”. Contudo, os noemas são objetos de consciência. No caso de um daltônico que observa uma bola verde e uma vermelha, por exemplo, a sua experiência é de duas bolas iguais, isto é, os noemas para ele não são a bola verde e a vermelha, mas as duas bolas iguais. Um observador externo—mas não o eu transcendental neste caso—consegue apontar a noese, que é a própria visão diferenciada do daltônico. Entre uma noese e seus noemas há uma correlação: um noema sempre revela uma noese e vice-versa; não há noese sem noemas, nem noema sem noese.

Porém, o exemplo anterior já expôs um grande problema: como um daltônico, por si só, poderia um dia sequer desconfiar que é daltônico? Por uma fenomenologia restrita à visão, eles jamais conseguiria¹⁵, pois fenomenologia é justamente isto: um discurso que parte das aparências tal qual elas se mostram para alguém. Um fenomenólogo daltônico jamais quereria saber o que é a bola verde e a bola vermelha, pois isso seria abandonar a sua posição do mundo em favor da posição de outro, cuja experiência, no final, nunca iria se mostrar para ele. A condição do fenomenólogo é abandonar qualquer teoria da experiência em favor da experiência propriamente dita. Ele assume a sua posição no mundo e nada mais: ele renuncia à revelação do que são as coisas por um deus que está acima dele. Ele rejeita qualquer explicação sobre o que está por trás das coisas, ele rompe, enfim, com qualquer esperança *metafísica*.¹⁶ Recorrendo à alegoria da caverna de Platão, arrisco caracterizar assim essa faceta da fenomenologia: segundo essa alegoria, os seres humanos vivem neste mundo uma situação análoga à de seres fictícios que viveriam presos no fundo de uma caverna, vendo projeções do mundo exterior sobre a parede do fundo. A orientação natural corresponderia, então, a acreditar nessas projeções como se elas fossem o mundo; a orientação metafísica consistiria em querer saber o que se passaria fora da caverna, e que causaria as projeções; a orientação fenomenológica resumir-se-ia a conformar-se em apenas ver as projeções, a tirar todo conhecimento da existência dali, sem contudo conferir-lhe o estatuto de realidade absoluta.

Todavia, a própria *redução transcendental* enquanto instrumento do fenomenólogo, fica ameaçada:

O maior ensinamento da redução é a impossibilidade de uma redução com-

¹⁴Os prefixos *no-* e *noo-* vêm “do [grego] *nóos-noûs, nóou-nôu* ‘inteligência, espírito, mente, pensamento’ (HOUAISS; VILLAR, 2001).

¹⁵Talvez ele conseguisse por outros caminhos, como, por exemplo, a observação do comportamento de pessoas não daltônicas em relação às bolas. Ainda assim, ele jamais teria o sentido de verde e vermelho de um não daltônico.

¹⁶Esse alheamento da metafísica se encontra mais fortemente presente na formulação inicial da fenomenologia por Husserl. Uma excelente discussão sobre o tema pode ser encontrada em Zahavi (2003, p. 39–42, 61–62).

pleta. Eis por que Husserl sempre volta a se interrogar sobre a possibilidade de redução. Se fôssemos o espírito absoluto, a redução não seria problemática. Mas, porque, ao contrário, nós estamos no mundo, já que mesmo nossas reflexões têm lugar no fluxo temporal que elas procuram captar [...], não existe pensamento que abarque todo o nosso pensamento. (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 10–11)

A palavra *fenômeno* comporta muitos sentidos. O sentido etimológico de *fenômeno* é *aquilo que se mostra*. Ele é absolutamente compatível com todos os demais sentidos, que dele derivaram. Por exemplo, quando *fenômeno* refere-se a *alucinação*, evidencia-se que aquela foi uma experiência vivida internamente pelo paciente, e aqueles acontecimentos, uma vez que *foram vistos* por ele, *se mostraram* a ele. De maneira similar, podem-se citar as ilusões de ótica, as miragens, os vultos e sombras laterais da visão, as ocorrências paranormais, as aparições fantasmagóricas, etc. Até aqui, os exemplos remetem a experiências excepcionais, o que confere a *fenômeno* um sentido de *coisa fora do comum*. No entanto, a grande maioria dos fenômenos de interesse é bem familiar, como as imagens, sons, texturas, sabores, cheiros, fantasias, lembranças, simulações mentais, etc. que vivenciamos diariamente. Tudo o que a consciência pode distinguir é um fenômeno. Um cubo visto na Figura 5 é um fenômeno. Mas, para a fenomenologia, *abordar o fenômeno* não significa aceitar naturalmente as primeiras impressões que ele causa: se, ao virar a cabeça, um vulto faz surgir em mim um forte sentido de uma presença humana, a redução transcendental me faz destacar aquilo da experiência e colá-lo nas lentes da minha percepção, desfazendo o efeito. No caso da imagem ambígua, o fenomenólogo *transcendentalmente a reduz* a uma mera configuração de traços capaz de *enfeitiçar* a percepção visual humana. O fenomenólogo está sempre buscando reduzir: quando não são os laços intencionais, são as teorias científicas, as visões metafísicas, e tudo o que for possível.¹⁷ O que resta disso é o fenômeno tal como ele é. O que resulta disso é um mundo cru, estrangeiro, *as coisas mesmas*.¹⁸ Recorrendo a um exagero apenas para melhor comunicar a ideia, é como se fosse possível que, por uma forte concentração no ato de ouvir, se deixasse de escutar palavras quando uma pessoa fala e apenas se ouvissem sons. Os sentidos habituais daqueles sons-palavras se perderiam. Ou, similarmente, de tanta concentração no ato de ver uma página

¹⁷Há vários tipos de redução, entre eles a redução *eidética*. A palavra grega *eidos* pode ser traduzida por *essência*. Husserl adotou a variante grega para escapar justamente dos prejuízos associados à ideia de essência. Contudo, a palavra *essência* foi a que ficou mais fortemente ligada à obra de Husserl e, até hoje, as pessoas a abordam com os sentidos que trazem consigo, fechando seus ouvidos aos sentidos de Husserl. Mesmo diante de um mundo reduzido, a reflexão ainda precisa recorrer a um certo tipo de categorização ou idealização para tratar tal mundo: “A necessidade de passar pelas essências não significa que a filosofia as tome por objeto, mas, ao contrário, que nossa existência está presa ao mundo de maneira demasiado estreita para conhecer-se enquanto tal no momento em que se lança nele, e que ela precisa do campo da idealidade para conhecer e conquistar sua facticidade” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 11–12). Por exemplo, preciso de certa noção de *percepção* quando abordo o mundo reduzido.

¹⁸Uma das mais conhecidas palavras de ordem de Husserl para os fenomenólogos: é preciso ir às coisas mesmas.

impressa, o sentido de que aquilo é um texto e todo o seu conteúdo desapareceriam para dar lugar a uma matriz de manchas pretas sobre um fundo branco. Enfim, assim como o nome de um parente em minha boca é irreconhecível quando eu o emprego para chamar um homônimo seu, assim como uma locução verbal que empreguei a vida toda se torna irreconhecível quando aprendo um novo sentido para ela, assim como um velho peso de papel em forma de cubo em minhas mãos se transforma em algo completamente novo se eu consigo fazer a minha percepção visual perder o sentido de dimensionalidade, toda a minha experiência se transforma se eu conseguir realizar que ela é mediada pelo meu ser: eis a orientação fenomenológica em ação e o mundo em estado de redução.¹⁹ Frente a esse mundo, a única atitude possível é a da *admiração*, como bem caracterizou Eugen Fink, assistente mais próximo de Husserl nos seus últimos anos, citado por Merleau-Ponty (2006, p. 10): e essa admiração é o *sintoma* da redução fenomenológica. É por isso que se diz que a fenomenologia é *sem pressupostos e rigorosa*: a fenomenologia é o racionalismo por excelência. E, no entanto, essa razão radical está fadada a não poder concluir nada além de que ela sozinha não dá conta do ser, de que seu mundo brota de algo que está além dela:

O filósofo, dizem ainda os [manuscritos de Husserl] inéditos [em 1945], é alguém que perpetuamente começa. Isso significa que ele não considera como adquirido nada do que os homens ou os cientistas acreditam saber. Isso também significa que a filosofia não deve considerar-se a si mesma como adquirida naquilo que ela pôde dizer de verdadeiro, que ela é uma experiência renovada de seu próprio começo, que toda ela consiste em descrever este começo e, enfim, que a reflexão radical é consciência de sua própria dependência em relação a uma vida irrefletida que é sua situação inicial, constante e final. (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 10–11)

Por isso que não se pode ler um texto fenomenológico *apenas racionalmente*: ali está um convite a uma experiência total do ser, que se abre a partir de uma correta orientação. “A relação ao mundo, tal como infatigavelmente se pronuncia em nós, não é nada que possa ser tornado mais claro por uma análise: a filosofia só pode recolocá-la sob nosso olhar, oferecê-la à nossa constatação” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 16).

Ricoeur (2007, p. 16, tradução minha) faz um comentário curioso, por ocasião de sua análise da passagem de *Ideias para uma fenomenologia pura e uma filosofia fenomenológica*, em que Husserl elabora e apresenta as reduções fenomenológicas como tema principal: “É difícil dizer em que ponto [do livro] as famosas reduções fenomenológicas estão sendo usadas, um fato que é muito desconcertante para o leitor”. Pelo menos na obra principal de Merleau-Ponty, as reduções não são explicitadas. Não há formalidades: “nessa redução...”, “o noema é

¹⁹Há um exagero *retórico* nessa imagem, pois muito dificilmente alguém conseguiria colocar em suspensão, ao mesmo tempo, vários dos seus laços intencionais. O quadro mais verossímil é aquele em que o fenomenólogo foca um ponto de seu mundo por vez, e, ali, realize reduções.

...”, “a noese é ...” ou qualquer coisa do gênero. Fica subentendido que as reduções propiciaram os estados nos quais os resultados trazidos pelo autor puderam ser claramente entendidos por ele. É capaz que alguns leitores, ao se defrontarem com o texto, o considerem obscuro. Talvez isso seja sinal de que eles não tenham conseguido adotar a mesma forma de perceber que o autor. *Na minha conta dessa operação*, a tarefa desses leitores passa a ser buscar essa condição, tendo como recursos as descrições do autor, as suas próprias experiências e a razão. O papel da razão é intermediar os confrontos entre as experiências descritas no texto e as experiências internas vividas pelo leitor, até que haja uma coincidência reveladora. A partir desse instante, a razão dá lugar à percepção, pois os resultados não parecem mais frutos de análises e raciocínios, mas de pura constatação. Esse momento em que tudo se mostra claro é a evidência da redução transcendental. Enfatizo duas características que são indispensáveis a esta operação: o voltar-se para si—isto é, a consciência que se tematiza, que se percebe percebendo—e os objetos da experiência—os sentidos. Portanto, é importante saber identificar e delinear na consciência os sentidos: as cores, as texturas, o peso de uma peça, a posição do próprio corpo, enfim, tudo o que pode ser distinguido *internamente*.

1.3.3 A descrição como método

Toda a exposição anterior desemboca graciosamente na explicitação dos sentidos da citação a seguir, que trata da questão metodológica na fenomenologia e do importantíssimo papel das descrições de experiências:²⁰

A descrição de nada adianta se ela não der abertura aos fenômenos descritos, pois o que se pode ganhar com a descrição não é uma apreensão definitiva dos fenômenos, mas uma consciência das condições sob as quais esses fenômenos podem se manifestar por si mesmos como eles são em si. A efetividade da descrição é comprovada quando, devido à forma de colocação em relação ao mundo que ela nos faz assumir, os fenômenos se mostram para nós. Assim, a chave para uma boa descrição, uma descrição que nos favoreça em realizar a apreensão dos fenômenos, é que ela nos impeça de nos orientarmos inapropriadamente em relação ao mundo através de falsos pressupostos e teorias com respeito aos fenômenos que visamos. (WRATHALL, 2009, p. 42, tradução minha)

Isso justifica a palavra de ordem da fenomenologia: “desista de explicar, limite-se a descrever”. Tudo o que fenomenólogo pode fazer, ou deve fazer, é criar as condições para que o fenômeno se mostre por si. É claro que essa exigência exclui do discurso fenomenológico muito

²⁰O autor tece essa formulação no contexto da caracterização da fenomenologia tal qual a teriam exercido Heidegger e Merleau-Ponty.

do que há no conhecimento científico: átomos, ondas eletromagnéticas, bactérias, etc.²¹ O exemplo do Sol é bem ilustrativo: nossa experiência fenomênica—mas não fenomenológica—nos diz que ele gira em torno de nós, ainda que saibamos, pelos livros, que a *realidade* é bem outra: nós é quem giramos em torno dele. Contudo, é possível *ver por si mesmo* que a versão dos livros não é absurda, como o personagem Galileu tenta fazer com o jovem Andrea na peça de Brecht (1956, p. 8–10, tradução minha):

ANDREA — Mas o que vejo é o que Sol, à tarde, está em um lugar bem diferente do que de manhã. Não pode, então, estar imóvel. Nunca! Jamais!

GALILEU — É assim que você vê? O que é que você vê? Não está vendo nada. Você olha sem observar. Olhar não é observar. (*Coloca o suporte com a bacia em que se lavou no meio do recinto.*) Aqui tem o Sol. Sente-se. (*Andrea se senta em uma cadeira. Galileu fica atrás dele.*) Onde está o Sol? À direita ou à esquerda?

ANDREA — À esquerda.

GALILEU — E como ele passaria para a direita?

ANDREA — Se o senhor puxá-lo para a direita, acho.

GALILEU — Só assim? (*Carrega a cadeira junto com Andrea e os translada para o lado de lá da bacia.*) E agora, onde está o Sol?

ANDREA — À direita.

GALILEU — E, por acaso, o Sol se moveu?

ANDREA — Não.

GALILEU — Quem se moveu?

ANDREA — Eu.

GALILEU (*irado*) — Tolice! A cadeira!

ANDREA — E eu com ela!

GALILEU — Claro... a cadeira é a Terra. E você está em cima. [...]

GALILEU — Quer dizer então que agora entendemos algo?

ANDREA — [...] O senhor tinha dito que a Terra se move ao redor de si mesma e não apenas em torno do Sol. Porém, a cadeira comigo se moveu somente ao redor da bacia e não ao redor de si mesma, pois senão eu cairia e isso é uma evidência. Por que não rodou a cadeira? Porque então estaria demonstrado que eu também teria caído da Terra. O que o senhor diz disso?

GALILEU — Mas eu mostrei...

ANDREA — Esta noite eu me dei conta de que, se a Terra realmente se movesse, eu ficaria de cabeça para baixo toda a noite. E isto é uma evidência.

GALILEU (*pega uma maçã da mesa*) — Olhe, aqui está a Terra [...] e aqui está você (*Crava uma lasca de madeira na maçã.*) e agora a Terra se move.

ANDREA — E agora estou de cabeça para baixo.

GALILEU — Por quê? Preste atenção, onde está a cabeça?

ANDREA — Aí, embaixo.

GALILEU — Quê? (*Mova a maçã para a sua posição original.*) Não seria, por acaso, o mesmo lugar? Os pés não estão sempre para baixo? Ficaria parado se eu o movo assim? (*Tira a lasca e dá uma volta.*)

ANDREA — Não. E por que então não noto nada do giro?

GALILEU — Porque você também realiza o movimento. Você o ar que está

²¹Mas a divisibilidade da matéria poderia ser descrita fenomenologicamente, assim como a fermentação e outros efeitos associados aos conceitos científicos.

sobre você e tudo o que está em cima da esfera.

ANDREA — E por que então parece que o Sol se move?

GALILEU (*Gira novamente a maçã com a lasca*) — Veja, você vê a Terra embaixo, que fica sempre do mesmo jeito, embaixo de você e para você ela não se move. Agora, olhe para cima, a lâmpada está sobre sua cabeça, porém, o que ocorre quando giro a Terra? O que fica sobre sua cabeça?

ANDREA (*Faz também o giro.*) — O aquecedor.

GALILEU — E onde está a lâmpada?

ANDREA — Desceu.

GALILEU — Ahá!

ANDREA — Isso, sim [...].

O jovem Andrea viu por si mesmo e, a partir dessa experiência, ele passou a poder escolher—através de uma postura interna conveniente—qual sentido evocar sob o Sol: a de que ele se move pelo céu, ou a de que nós é quem giramos em torno de nós mesmos enquanto ele brilha ao nosso lado. A descrição *quebrou* um certo modo de ver limitado que ele tinha. Mas, essa ainda não é a descrição fenomenológica propriamente dita, embora ela satisfaça parcialmente os critérios de Wrathall, pois ainda há nela prejuízos intencionais a serem superados.

1.4 Percepção

Uma fenomenologia da percepção não pode levar a outro resultado que não seja uma nova forma de *perceber a percepção*. Esta seção é uma tentativa de descrever de forma breve a percepção seguindo principalmente a *Fenomenologia da percepção* de Merleau-Ponty.

A percepção costuma ser associada aos estímulos dos cinco sentidos, como se ela fosse uma camada básica e periférica da consciência. Nesse papel, não parece ser difícil aceitar que a percepção é um tipo de conhecimento imediato—isto é, sem intermediários— e direto com as *sensações*. Em Husserl, ainda há alguma distinção entre *dados mais sensórios* e sentidos de mais alto nível. “O fluxo da consciência contém dois diferentes componentes: I) Um nível de conteúdo sensual não intencional, sejam eles sensações visuais ou tácteis, sensações de dor, náusea, e, assim, por diante” (ZAHAVI, 2003, p. 57), ou seja, aquela ideia de sensações puras e não interpretadas, como quando se ouve uma frase mas só se atenta aos sons, ignorando as palavras—a eles Husserl chama de matéria sensual (*hyle*) ou simplesmente matéria *hilética*— ; “II) Uma dimensão intencional de componentes animados e plenos de sentidos (*meaning-giving*)”, que são as noeses e os noemas, mas a quem Husserl chama de forma intencional (*morphe*). Merleau-Ponty começa sua análise justamente refutando toda e qualquer noção de sensação. Para ele, o estímulo mais elementar já carrega um sentido e, portanto, é intencional, é uma percepção. Merleau-Ponty eleva a percepção a um caráter proeminente na paisagem cog-

nitiva. As análises do filósofo ao longo de sua obra magna trazem, para a alçada da percepção, sentidos muito mais complexos do que apenas simples experiências sensoriais. A percepção como ele a trata atravessa verticalmente nossa experiência. Ela se imiscui em nossos assuntos mais próximos, de qualquer alçada, e está presente e atuante em todos eles. Por exemplo, um adulto alfabetizado reconhece palavras escritas por operações perceptivas—basta tentar ler grego ou cirílico para que ele talvez se sinta instantaneamente de volta aos bancos escolares, catando letras—, o que mostra como nossa percepção aprende e opera nossos sentidos mais convencionados. Merleau-Ponty chama a atenção para a própria operação de datilografia como um exemplo desse tipo. Contudo, antes que se possa objetar, a fenomenologia da percepção não recai em uma concepção behaviorista da experiência humana.

A grande revelação que a fenomenologia faz sobre a percepção, aquela mediante a qual todas as demais passam a ser corolários imediatos, é a de que a percepção é a fonte primária dos sentidos do mundo. “[...] [A] percepção é justamente este ato que cria de um só golpe, com a constelação dos dados, o sentido que os une—que não apenas descobre o sentido *que eles têm*, mas ainda faz com *que tenham um sentido*.” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 65–66)

O dado sensível mais elementar que podemos ter é uma figura sobre um fundo (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 24). E, no entanto, ele já tem um sentido, ou melhor, ele *é* um sentido. Um ponto escuro rodeado de cor clara pode ser *sentido* como uma mancha sobre uma superfície. Há uma *superposição*: o ponto está na frente da superfície lisa. Eis o sentido!, identificado na consciência. Ele é uma certeza: o ponto está sobre um fundo. No entanto, é possível manipular essa experiência. O mesmo ponto, agora, pode ser sentido como um furo. A superfície lisa *passa para frente*: o ponto é algo que está atrás dela, e se deixa ver através dela. Outro sentido identificado. E não para por aí: até então, o entorno claro tem sido experienciado como algo plano: uma parede, um papel, um anteparo. Uma experiência diferente é ver a cor clara que circunda o ponto como um fundo infinito, assim como o céu, e o ponto como algo que flutua, tendo esse infinito por trás. É um terceiro sentido. A questão é: de onde vêm esses sentidos? Eles vêm à tona por meio de uma operação racional? Não, esses sentidos brotam da percepção. A própria experiência dos sentidos, a certeza deles, a convicção que temos deles é a percepção em ação. Mas não nos damos conta disso, pois somos programados para acreditar em todos os sentidos da percepção como se fossem a própria realidade. A percepção é, de certa forma, esquecida. Ela é tudo o que vivemos, mas esquecemos disso, precisamos esquecer. O que está em jogo, aqui, como se vê, é uma forma de intencionalidade. A razão, na experiência de há pouco, apenas ajudou a percepção a se mover de um sentido para outro, mas ela não *produziu* os sentidos. Tenho, de um lado, um cubo, e, de outro, o desenho de um cubo no papel. O desenho é simples, apenas linhas escuras sobre um fundo claro, sem efeitos de sombra, mas

também sem transparências; as formas são bem feitas, as retas parecem perfeitas, e o arranjo tem o realismo da técnica da perspectiva. Aquilo que me dá a experiência de cubo a partir do desenho é o mesmo que me faz saber que o cubo sólido que tenho do outro lado é um cubo. É claro que o cubo sólido tem outros recursos: se movo a cabeça, ele se transforma, mas o desenho não; há experiências táteis; há efeitos de sombra, etc. O cubo sólido é o sincronismo de diversas percepções que se encontram e, por chegarem a um acordo, fazem brotar a realidade do cubo. Contudo, se eu puder tirar essas vantagens do cubo sólido, e conseguir reduzi-lo apenas às linhas de seus contornos, assim como o desenho, então eu vou entender que a disposição mágica dessas linhas, por si só, já é suficiente para despertar em mim o sentido de cubo. Esse é o mesmo sentido que brota no desenho. Portanto, esse sentido não está mais no cubo do que no desenho, ele está em mim! Cubo é uma coisa que existe em mim e que se acende na presença de uma configuração específica de traços. Essa experiência do cubo, essa certeza, é uma percepção. Ela não existe no mundo, ela não está à espera que eu a encontre. Ela está em mim, é a forma que a minha percepção me diz: lá fora existe uma certa propriedade. A percepção não usa palavras, não usa nomes, ela faz a experiência acontecer. Se a experiência do cubo fosse intrínseca ao cubo, como explicar que eu posso, por um esforço de concentração, ao mirar o cubo, buscar uma percepção em que não me vejo mais dentro da cena, mas como se visse tudo aquilo como uma fotografia? Essa é uma experiência muito difícil de realizar, especialmente pela influência de diversas outras percepções atuando simultaneamente. Mas posso me voltar para o desenho, em que vivo a experiência do cubo naturalmente, e buscar apagá-la, tentando ver aquilo como um conjunto desconectado de linhas num papel. Essa experiência é bem mais fácil, mas a outra também é possível. Merleau-Ponty (2006, p. 300) tangencia essa proposta ao abordar o caso de pessoas que nascem sem enxergar, crescem assim, mas um dia passam a ver. Em um caso como esse, a pessoa não consegue distinguir uma maçã de um fotografia da maçã. Ela precisa aprender isso. A percepção *aprende*. Ela está sempre buscando os sentidos do mundo. A imagem da maçã real é tão sem sentido, para ele, quanto a fotografia. E, no entanto, se ele fechar os olhos e tocá-las—ou mesmo que não fechasse os olhos—ele reconheceria a maçã e reconheceria o papel de fotografia, pois esses eram os sentidos do mundo que ele tinha e através do qual brotavam seu mundo. O curioso é que o conjunto de dados visuais que ele tem é provavelmente o mesmo que uma pessoa qualquer tem, no entanto, para esta, parece que há algo a mais a lhe dizer que a maçã é a maçã. Há um sentido de maçã e de fotografia que brota daqueles dados visuais. Um portador de necessidades especiais que volta a enxergar, ao ver um fecho de luz, tenta pegá-lo com as mãos:

“Após a operação”, diz-se, “a forma [no sentido de formato] tal como é dada pela visão é para os [portadores de necessidades especiais] algo de absolutamente novo que eles não relacionam à sua experiência tátil”; “o [portador

de necessidade especial] afirma que vê, mas não sabe aquilo que vê (...) Ele nunca reconhece como tal a sua mão, ele só fala de uma mancha branca em movimento”. Para distinguir pela visão um círculo de um retângulo, é preciso que ele siga com os olhos a extremidade da figura, como o faria com a mão, e ele sempre tende a pegar os objetos que se apresentam ao seu olhar. [...] Os dados mostram que a visão não é nada sem certo uso do olhar. Os [portadores de necessidades especiais] “primeiramente veem as cores assim como nós sentimos um odor: ele nos banha, age sobre nós, sem todavia preencher uma determinada forma de uma determinada extensão”. Primeiramente, tudo está misturado e tudo parece em movimento. A segregação das superfícies coloridas, a apreensão correta do movimento só vêm mais tarde, quando o paciente compreendeu “o que é ver”, quer dizer, quando ele dirige e passeia seu olhar como um olhar, e não mais como uma mão. (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 300–301, notas de referência suprimidas)

Merleau-Ponty prossegue questionando aqueles que consideram que apenas através da visão é possível haver um sentido de espaço. “Longe de excluir a ideia de um espaço tátil, os fatos provam, ao contrário, que existe um espaço tão estritamente tátil que suas articulações em primeiro lugar não estão e até mesmo nunca estarão em relação de sinonímia com aquelas do espaço visual.” (p. 301) Existe um sentido de espaço e esse sentido, que é aquilo que o portador de necessidades especiais que volta a ver conhece com a mais absoluta convicção como espaço, é justamente o sentido de espaço que a percepção sabe criar. Da mesma forma, o sentido de volume do cubo não está para ele como está para uma pessoa qualquer.

Uma classe inteira de prejuízos é gerada quando se considera que o mundo que é trazido à vida pela percepção já está lá *antes da percepção*. A essa classe costuma-se dar o nome de *empirismo*. Segundo essa orientação, as coisas são como são, e só nos resta ir lá para ter notícia disso. Por exemplo, existe um espaço tridimensional euclidiano e as orientações deste espaço. Assim, existe o ‘alto’ e o ‘baixo’ no mundo mesmo, eu só preciso entrar em contato com eles. Ora, essa posição ignora que, se há um sentido de ‘alto’ e ‘baixo’, ele é uma percepção. Em outras palavras, a percepção, ao criar o meu mundo percebido, para me fazer sabedor de certa propriedade do mundo além de mim, ela o faz causando em mim essa experiência de ‘alto’ e ‘baixo’ que tenho. O empirista, por rejeitar qualquer participação do sujeito na gênese do mundo, como se o mundo vivido estivesse pronto, torna-se incapaz de explicar uma série de fenômenos psicológicos conhecidos, como o caso da falta de inversão retiniana. A forma simples de descrevê-la é assim: o portador de necessidades especiais diz que, para ele, ‘alto’ está nos pés e ‘baixo’, na cabeça. Por considerar que ‘alto’ e ‘baixo’ são propriedades absolutas do mundo, o empirista deduz que as imagens invertidas da retina do portador de necessidades especiais, que, numa pessoa qualquer, são corrigidas, não estariam sendo corrigidas. Um tratamento possível é usar óculos especiais, feitos com espelhos, que invertem tudo o que é visto. O empirista talvez esperasse uma solução instantânea a partir do uso dos óculos, mas não é isso

que se vê:

[...] [P]rimeiramente a paisagem parece irreal e invertida; no segundo dia da experiência, a percepção normal começa a se restabelecer, à exceção de que o paciente tem o sentimento de que seu próprio corpo está invertido. No decorrer de uma segunda série de experiências, que dura oito dias, primeiramente os objetos parecem invertidos, mas menos irreais do que a primeira vez. No segundo dia, a paisagem não está mais invertida, mas é o corpo que é sentido em posição anormal. Do terceiro ao sétimo dia, o corpo se apruma progressivamente e enfim parece estar em posição normal, sobretudo quando o paciente está ativo. (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 329)

Esse relato ganha todo o sentido quando se rompe com o empirismo. Embora possa-se distinguir entre céu e chão, não é isso que é o sentido de ‘alto’ e ‘baixo’. Tal sentido é uma percepção, uma certeza interior do que é ‘alto’ e ‘baixo’. O problema do portador de necessidades especiais é que o seu sentido de ‘alto’ e ‘baixo’ está casado com seus sentidos visuais de maneira inversa em comparação com uma pessoa normal. Quem disse que a causa disso é a inversão da retina que não é desfeita? Com o uso dos óculos, um mundo visualmente invertido se instala, e a percepção começa a aprender os sentidos desse novo mundo, tendo a memória do mundo anterior. Ao longo do processo, surgem os conflitos entre as duas fontes de sentido: o mundo antigo e o mundo invertido. Com o passar do tempo, a segunda ganha força e um novo equilíbrio é estabelecido.²² Merleau-Ponty (2006, p. 334) comenta também sobre uma experiência parecida, mas na qual os óculos dão apenas o efeito de uma rotação de 45 graus. Após algum tempo de uso, a certeza que se costuma ter de que a linha em pé é vertical é transferida para a linha inclinada, mostrando que o sentido de verticalidade é construído pela percepção independentemente do contexto visual. Voltando à questão do empirismo, talvez sua maior expressão seja a teoria da representação interna, tão insistentemente combatida por Husserl. Segundo essa teoria, para todo objeto de que tomo consciência, internamente, em minha mente, há uma representação. Assim, ao segurar o livro, aqui está ele, em minhas mãos e *lá no cérebro* existe uma representação do livro. Há duas coisas então: o livro e a representação do livro. O livro, tal como eu o conheço, é o ponto de partida e a representação é o ponto de chegada. Porém, isso que eu tenho em minhas mãos e que chamo o livro *é o efeito final no cérebro!* Não existem dois. Eu não tenho o ponto de partida e o ponto de chegada: eu só tenho o ponto de chegada. Essa coisa chamada livro que estaria no ponto de partida, embora ela exista, eu não posso conhecê-la diretamente, tudo de que disponho são os pontos de chegada, as *representações* no jargão da teoria em tela, mas que melhor seriam denominadas *percepções*.²³ Se acreditasse que

²²Alguma coisa nessa experiência lembra a situação de aprender uma língua diferente de sua língua nativa em outro país.

²³“Em vez de se dizer que se experienciam *representações*, dever-se-ia considerar que nossas experiências ocorrem por meio de *presenças*, e que elas *apresentam* o mundo como tendo certas características.” Zahavi (2003, p. 19, tradução minha).

o que tenho em mãos é o livro em si, fora de mim, e que ele *é* tal qual o percebo, isso significaria *pressupor o mundo* que percebo como existente em si antes da percepção. Seguro o livro. Foco a experiência da cor. Esse vermelho intenso que estou vivendo não é do livro: é meu. Se eu fosse daltônico, ou se fosse um águia, estaria vivenciando o livro de uma outra forma. Não é que o livro não exista ou não tenha uma propriedade sua, mas o vermelho que vejo é apenas a forma como a minha percepção me apresenta essa propriedade. A minha certeza absoluta do vermelho só existe porque estou programado para assumir minhas percepções das coisas como as próprias coisas. O peso do livro, o esforço do braço para segurá-lo, a textura do livro que o contato da mão revela são modificações nos meus estados internos provocados pela percepção. Ainda assim, os tomo como certeza de serem do livro. Olho ao redor e sei que estou em uma sala. As imagens que vejo, os sons dos carros lá fora ecoando no ambiente, tudo isso me dá a certeza de estar numa sala, mas essa própria certeza é uma percepção. Ou seja, tudo precisa ser invertido: as percepções são o ponto de partida da minha experiência, e o mundo não está fora de mim: o próprio sentido de que o livro está *fora de mim*, a própria certeza do dentro e do fora são sentidos criados pela percepção: são percepções.

Merleau-Ponty reúne em uma classe a que denomina *intelectualismo* prejuízos de uma outra ordem, mas que também são fruto de um tipo de pressuposição do mundo. Segundo o intelectualismo, os sentidos da percepção são fruto de uma *interpretação*, ou, em outras palavras, de um *juízo*, que se realiza a partir de *puras sensações*. A noção de sensação em si é mais fortemente presente no empirismo e pode ser refutada no bojo da crítica que lhe é feita. Para abordar o intelectualismo, por sua vez, o caminho é reformular a questão por ele proposta: se o sentido da percepção é um juízo, quem o faz? *Quem percebe?* A percepção é uma atividade de um sujeito reflexionante? Seja o processo da visão binocular (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 310–314). Se aproximo a base do dedo indicador, em posição vertical, da ponta do nariz, vejo *dois dedos*. Isso se justifica, obviamente, porque tenho dois olhos, e cada um gera uma imagem do ambiente à minha volta. Se eu afasto o dedo lentamente, a partir de um certo ponto, as imagens se fundem, e passo a ver *um só dedo*. O próprio sentido de unidade das duas visões é um sentido montado pela percepção, ou, como preferiria Merleau-Ponty, pelo corpo. Mais que isso: o corpo busca, a todo instante, encontrar esse sentido nas coisas—nesse caso, no dedo. Quando o dedo ainda estava próximo do nariz, alguma coisa estava fora da ordem, ou seja, o corpo estava buscando um sentido para o mundo, e *por si mesmo*. Essa inquietação com o mundo em desordem e a subsequente busca de uma ordem e de um sentido para o mundo no próprio mundo não são da alçada da razão:

Para que meu olhar se reporte aos objetos próximos e neles concentre os olhos, é preciso que ele sinta a diplopia como um desequilíbrio ou como uma visão

imperfeita, e que ele se oriente para o objeto único como para a resolução dessa tensão e a conclusão da visão. [...] Portanto, a unidade do objeto na visão não resulta de algum processo em terceira pessoa, que finalmente produziria uma imagem única fundindo as duas imagens monoculares. Quando se passa da diplopia à visão normal, o objeto único substitui as duas imagens e visivelmente não é sua simples sobreposição: ele é de outra ordem que elas, incomparavelmente mais sólido do que elas. Na visão binocular, as duas imagens da diplopia não são amalgamadas em uma só, e a unidade do objeto é intencional. Mas—eis-nos no ponto a que queríamos chegar—ela não é por isso uma unidade nocional. Passa-se da diplopia ao objeto único não por uma inspeção de espírito, mas quando os dois olhos deixam de funcionar cada um por sua conta e são utilizados por um olhar único como um só órgão. Não é o sujeito epistemológico que efetua a síntese, é o corpo, quando sai de sua dispersão, se ordena, se dirige por todos os meios para um termo único do seu movimento, e quando, pelo fenômeno da sinergia, uma intenção única se concebe nele. (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 311–312)

Para esse *sujeito de percepção*, que está além da razão, Merleau-Ponty dedicou a palavra *corpo*. O autor bem observa que esse corpo vive seus sentidos, busca seus sentidos, entregando-se a eles, esquecendo-se de como vieram à tona: minha visão é dupla, mas é preciso que ela se faça como única. Ora, isso é a própria ideia de intencionalidade. A intencionalidade em questão é do corpo. Ele, o sujeito de percepção, se entrega a seus sentidos sem tematizar a si próprio. Esse tipo de intencionalidade que “forma a unidade natural e antepredicativa do mundo e de nossa vida, que aparece em nossos desejos, nossas avaliações, nossa paisagem, mais claramente do que no conhecimento objetivo” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 16) e que “fornece o texto do qual nossos conhecimentos procuram ser a tradução em linguagem exata” é chamada *intencionalidade operante*, um conceito de Husserl apropriado por Merleau-Ponty. Faço algumas observações de minha própria vivência da intencionalidade operante: o corpo vive em permanente *intenção* de reconhecer o mundo tal como ele o apreendeu. Se o céu ficasse vermelho de repente, isso seria suficiente para interromper toda a minha ação, pois seria uma quebra de um sentido habitual. O corpo faz a conferência contínua dos sentidos que conhece, neste caso, o céu azul. Um exemplo concreto de quebra de sentidos esperados é o passo em falso: a cada passo que dou, ao pôr o pé no chão, tenho a expectativa de encontrar um solo. Se há um buraco que eu não vi, o sentido esperado de solo não se realiza, e, por um breve instante, várias coisas acontecem, sem ao certo sabermos exatamente se ao mesmo tempo ou em alguma ordem: há uma confusão, isto é, uma *perda de sentido*; há uma busca pela fixação e estabilidade do corpo; o pé alcança o fundo do buraco; o sentido do passo em falso se estabelece. Exemplos similares ocorrem, com muita raridade, na percepção visual, por ocasião de um giro da cabeça, ou uma mudança súbita de direção do olhar, etc. Num relance, uma configuração visual sem sentido se mostra e uma insatisfação emerge, seguida de uma *busca por sentido*. Por exemplo, se, ao olhar um cubo normal, por um breve instante uma imagem como a Figura 8 se

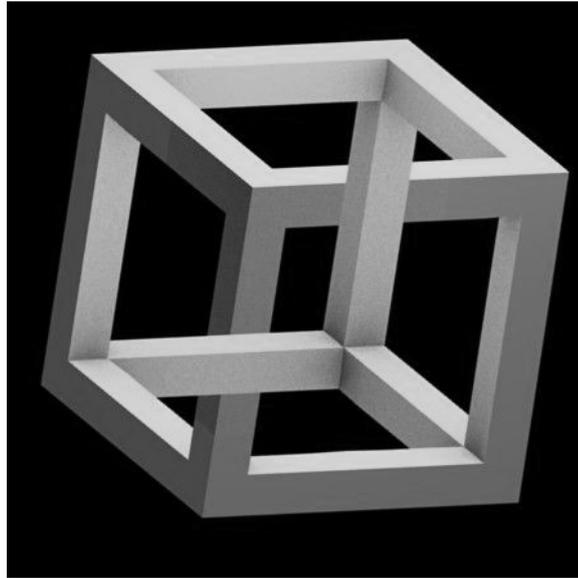


Figura 8: Cubo impossível. Fonte: Alexeev (2008).

formasse, haveria uma experiência de confusão visual, de perda de sentido. Esses são exemplos de eventos onde a perda e a retomada de sentido ocorrem muito rapidamente, muito mais do que uma operação intelectual costuma demorar. Esses são sentidos da percepção, os sentidos originários de nosso mundo. Nunca é demais retomar esse que é o ponto central desta seção. Merleau-Ponty (2006, p. 313) bem observa que desconfiamos das imagens dobradas da visão binocular, mas quando elas desaparecem, sentimo-nos voltando para casa, para nossa realidade familiar e inquestionável, como se ela não fosse apenas uma variação da experiência angustiante de um pouco antes:

Quando passo da diplopia à visão normal, não tenho consciência de ver pelos dois olhos *o mesmo objeto*, tenho consciência de progredir para o objeto *ele mesmo* e de ter enfim a sua presença carnal. As imagens monoculares erravam vagamente *diantes* das coisas, elas não tinham lugar no mundo, e repentinamente elas se retiraram para um certo lugar do mundo e ali são tragadas, assim como fantasmas, à luz do dia, voltam para a fissura da terra de onde tinham saído. O objeto binocular absorve as imagens monoculares, e é nele que se faz a síntese, é em sua clareza que elas enfim se reconhecem como aparências desse objeto.

A redução fenomenológica rompe os véus intencionais para trazer à luz a percepção. Estou encarnado em um corpo e o mundo que vivo é um espetáculo montado pela percepção para que eu viva o mundo que está além. Não é que o mundo não exista, mas *esse mundo*, na forma como ele se apresenta, é um mundo *para mim*. É como se eu estivesse dentro de um submarino completamente fechado, onde, para saber se há uma pedra à frente, um sonar é utilizado: se há o retorno do som, há um obstáculo, e o tempo observado entre a emissão e a

recepção do som é proporcional à distância em relação a ele. Se nunca me pudesse ser dada a oportunidade de conhecer o mundo fora do submarino, tudo o que teria seriam aqueles tempos mais longos ou mais curtos. E, no entanto, não seria preciso muito tempo nessa clausura para que as sutilezas do sonar ganhassem renovados sentidos: um eco mais prolongado revelaria as escarpas do fundo do mar; fracos sons moventes delatariam grandes animais; um cintilar de sons seria a certeza de um imenso cardume; e, acima de tudo isso, a inexorável realidade da superfície, com seus ecos marcantes. Pouco a pouco, o submarino, o sonar, e os tempos medidos, embora nunca deixassem de estar presentes e à frente de tudo, retirariam-se para o fundo da cena, esquecidos, dando lugar à riqueza de sentidos do vasto oceano. Pois é assim que estamos: esquecidos das percepções, e de como elas pintam um mundo para nós. A alegoria do submarino poderia ter, pelo menos, dois sentidos: em um deles, ela revela como a percepção vive buscando aprender e apresentar os sentidos do mundo, adaptando-se continuamente; no outro sentido, onde a alegoria mostra seu limite, seria preciso ver uma mágica acontecer—uma mágica pela qual os sinais do sonar se transformam nas próprias coisas que os geraram. “[...] [N]ão é preciso perguntar-se se nós percebemos verdadeiramente um mundo, é preciso dizer, ao contrário: o mundo é aquilo que nós percebemos.” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 13–14)

Se há uma experiência que deve sobressair-se desta seção é a de *sentido de percepção*. Essa é uma locução substantiva duplamente redundante, visto que todo sentido em fenomenologia é uma percepção e que toda percepção tem um sentido. Ainda assim, adoto essa locução para salientar algo. Fiz referência a diversos *sentidos de percepção*: o sentido de volume (no cubo), o sentido de ‘alto’ e ‘baixo’, o sentido de maçã, o sentido de fotografia, o sentido de verticalidade, etc. Alguns desses sentidos parecem ser mais básicos que outros: por exemplo, o sentido de maçã pressupõe um sentido de volume, assim como o sentido de verticalidade pressupõe um sentido de ‘alto’ e ‘baixo’. Tendo isso em mente, é possível rerepresentar a tese defendida neste trabalho. Parte importante da tese é indicar explicitamente dois sentidos de percepção, do tipo mais básico, que são de interesse da educação matemática. De início, apresento o sentido de percepção que denomino *sentido de dependência*, que aponto como decisivo para as representações dinâmicas de funções (Seção 2.2). De forma similar, aponto o sentido de restrição como decisivo para a geometria dinâmica (Seção 3.2). Além disso, apoiado na concepção fenomenológica de que a percepção é uma fonte originária de sentidos, analiso como a percepção pode atuar no estudo das funções matemáticas quando uma representação dinâmica de função é empregada (Capítulo 2).

1.5 Considerações finais

Da Seção 1.2, que precede à apresentação da fenomenologia e da noção fenomenológica de percepção, o que emerge com mais força é uma proposição pessoal a respeito de uma *epistemologia de sentidos*, que, por força de um otimismo, até gostaria de se fazer uma ontologia: *tudo são sentidos*. Mas, não!, sigamos o espírito da fenomenologia nascente e nos eximamos de querer saber o que são as coisas e nos concentremos em como sabemos o que podemos saber—uma epistemologia—: *tudo o que experienciamos são sentidos*. A primeira questão de uma epistemologia de sentidos é como posicionar elementos típicos de uma epistemologia, como, por exemplo, pensamento e conceito. De fato, essas relações não estão claras. A mais forte objeção, porém, que uma epistemologia de sentidos pode receber é a forte subjetividade que ela impõe sobre a experiência humana. Para entender isso, basta considerar, como caso emblemático da noção de sentido, a experiência da cor: embora a vivenciemos diuturnamente e tentemos comunicá-la por meio de palavras, há um limite que nos impede de considerar que o sentido de cor pode mesmo vir a ser compartilhado diretamente. O que temos são vários indícios de que as experiências interiores (sentidos) de cada um resultam em respostas similares e conformes, mediante o que adotamos uma postura pragmática de considerar a experiência da cor como algo claramente objetivo e comum (compartilhado), mas isso não é resolver o problema, é fingir que ele não existe. Uma epistemologia de sentidos leva a um entendimento subjetivista da experiência humana pois, como tudo o que experienciamos são sentidos internos, estabelece-se uma impossibilidade de compartilhamento de qualquer sentido assim como nos parece impossível comunicar a experiência da cor. Mas, exatamente por que uma tal visão subjetivista nos incomoda? Há dois fatores: primeiro, uma certeza de que o mundo funciona e isso só pode se explicar porque existe uma inegável objetividade; segundo, a subjetividade é, muitas vezes, tomada como sinônimo de isolamento, e isso contraria nossas intuições sobre o fenômeno social. Para abordar tais questionamentos, recorro, mais uma vez, à fenomenologia, especialmente a fenomenologia husserliana, citada a partir daqui por via da apresentação feita por Zahavi (2003), com traduções minhas. Antes de mais nada, é preciso posicionar que a noção de sentido ocupa também um colocação central na experiência humana segundo a fenomenologia husserliana. Isso se desdobra em diversos tópicos da doutrina, dos quais escolho um para iniciar a argumentação, que é a noção, muitas vezes incompreendida, da experiência pré-predicativa, também associada à percepção. “[...] Husserl considera as intenções linguísticas como menos originais e fundamentais que as intenções perceptivas” (p. 29). Há, nessa passagem, um sentido de fundamentação, isto é, de que as intenções linguísticas são condicionadas e não podem existir independentemente das intenções perceptivas. “Portanto, Husserl diria que o sentido linguístico está enraizado em um encontro pré-linguístico e pré-predicativo com o

mundo.” E a experiência das cores retorna como exemplo emblemático: “Mesmo que a pessoa conheça termos como ‘*crimson*’, ‘*scarlet*’ e ‘*vermilion*’, ela não teria o devido conhecimento dos conceitos envolvidos se fosse cega e, portanto, incapaz de ver essas cores”. A noção de experiência pré-predicativa é justamente a afirmação de uma epistemologia de sentidos. “O prefixo *pré-* [...] não se refere ao fato de que as experiências em questão ocorrem anteriormente no tempo [...]”, mas de que ela é condição permanente para tudo mais, inclusive a linguagem. Essas passagens foram tiradas de um trecho em que Zahavi está particularmente voltado para a tarefa de criticar as modernas filosofias da linguagem, mas essa crítica tem pouco valor para mim no momento. O importante é destacar que a experiência pré-predicativa está a todo instante presente e disponível *internamente*, embora seja irreduzível a palavras, incomunicável. Esse é o pré-predicativo da filosofia husserliana, que se alinha com uma epistemologia de sentidos. E, portanto, cabe a essa corrente de pensamento a pecha de subjetivista também. Então, como Husserl a contorna? Primeiramente, é preciso dizer que Husserl abertamente assume a subjetividade da experiência humana. “A tentativa de alcançar uma compreensão filosófica do mundo leva [...] indiretamente a um desvelar da subjetividade, visto que a perspectiva fenomenológica sobre o mundo deve necessariamente se dar através do aparecimento do mundo *para a subjetividade*” (p. 51). Na sua discussão da subjetividade, Husserl usa, inclusive, o adjetivo *monádico*, que remete ao conceito de mônada em Leibniz, isto é, “átomo inextenso com atividade espiritual, componente básico de toda e qualquer realidade física ou anímica, e que apresenta características de imaterialidade, indivisibilidade e eternidade” (HOUAISS; VILLAR, 2001). A ideia de mônada reflete a ideia de que nos posicionamos, na existência, em um campo indiviso e particular, em que predomina um caráter de imanência. A chave para entender a abordagem da fenomenologia sobre essa questão é não recebê-la como *uma afirmação da subjetividade*, mas como *uma negação da objetividade*. O que está em xeque é justamente essa atitude pragmática de considerar o mundo vivido como algo absolutamente transparente e consensual a todos, como se os filtros de nossas individualidades não existissem. É isso que está em jogo quando Husserl fala da crise das ciências e da civilização. Seria muito bom poder acreditar que conceitos como átomos, bactérias, campos de força, etc. se mostrassem claramente para todos de modo igual. Ou mesmo conceitos mais evidentes, como democracia, justiça, felicidade, dor, sede, etc. Em que pese nossa fé na objetividade de nossas vidas, talvez devêssemos admitir que aí está a raiz de muitas de nossas dificuldades. Tome-se o caso da educação matemática, que é nosso tema primeiro sempre. O trabalho de Vinner em torno da noção de imagem conceitual é um caso exemplar dos prejuízos causados ao se considerar a matemática como um discurso transparente a todos. Se a existência humana há de ser desafio acima de tudo, que seja este: não cair na tentação do caminho fácil da objetivação da experiência e do mundo, grande vilão

dominante na ciência, na política, na educação, nos espaços públicos e privados. Para combatê-lo, o remédio não sedutor da ascese: o colocar-se sempre em perspectiva, e, se o que está em jogo são os próprios prejuízos, o remover os véus intencionais, isto é, a redução transcendental. Se a própria subjetividade se torna objeto para a ciência: “[na fenomenologia], a subjetividade que encontramos não é mais o sujeito empírico—o sujeito que é investigado pelas ciências positivas tais como psicologia, história e neurofisiologia” (p. 51), pois “[o] sujeito empírico é um objeto no mundo, e como todos os demais objetos que aparecem no mundo, ele pressupõe um sujeito para quem ele aparece”, então “essa subjetividade mantém-se escondida na medida que nos entregamos a uma atitude natural pré-filosófica, onde nos autoescondemos entre objetos, mas que [a redução] é capaz de revelar”. A fenomenologia é um convite para a superação da dicotomia sujeito-objeto, e isso não se dá como um raciocínio, mas como um forma nova de engajamento nas próprias vivências, uma mudança de experiência no nível perceptivo, mais que racional. Sob essa perspectiva, uma epistemologia de sentidos não distoa tanto. E, para fazer jus à fenomenologia, preciso dizer que temas como solipsismo, intersubjetividade, alteridade (a experiência do Outro), etc. são temas prioritários de Husserl, aos quais eles se dedica amplamente, como se comprova pela extensão que o assunto ocupa em suas obras, principalmente as da parte final de sua carreira. Como atesta a palavra final de Zahavi em sua concisa e atual introdução ao pensamento husserliano: “[Espero ter demonstrado] que Husserl não defendeu uma filosofia subjetivista clássica à la Kant e Descartes, e que ele não era um solipsista, mas, ao contrário, tratou a intersubjetividade como uma noção filosófica transcendental de importância última [...]” (p. 140).

Com respeito ao delineamento de uma metodologia—que foi caracterizada de início como em primeira pessoa, descritiva e introspectiva—posso agora caracterizá-la como uma *prospecção da experiência pré-predicativa*. Sobre a experiência pré-predicativa, vale lembrar que ela não é oculta, muito pelo contrário, ela é aquilo que há de mais próximo. Mas, justamente por isso, é não tematizada, isto é, anônima, tácita, implícita. A experiência como um todo inclui: (a) polos de síntese, que são manifestações mais externas e palpáveis da experiência, e (b) a dimensão pré-predicativa, onde tudo está enraizado. Esses polos de síntese, que, quase sempre, são passíveis de objetivação, podem ser, por exemplo, imagens, palavras, símbolos, etc. Nossa tendência é conferir os créditos da experiência para os polos de síntese, ignorando sua fundamentação na experiência pré-predicativa. É como um *iceberg*: a ponta que aparece fora d’água são os polos de síntese e a parte submersa que sustenta todo o conjunto é a experiência pré-predicativa. Uma grande classe de exemplos desse fenômeno gravita em torno da imagem do próprio corpo. Nessa discussão, as artes e as modalidades esportivas se mostram como atividades em que um conhecimento mais profundo da experiência é desenvolvido. Se pensarmos

em nossos rostos, tendemos a concentrar a experiência nos polos de síntese das imagens que temos na memória dos momentos em que vimos fotos ou o rosto refletido, ou então nas palavras e signos que costumamos usar para designá-los. Embora essas imagens e palavras façam parte da nossa experiência de nossos próprios rostos, há que se considerar ainda as complexas percepções táteis, musculares e viscerais que a compõem. Mesmo quando não estamos frente a um espelho, temos a imagem de nosso próprio rosto: podemos discernir se estamos alegres, preocupados, tranquilos. Essa imagem mental do rosto está sempre ali, muito atuante, mas, como já foi dito, quase sempre não reconhecida. Quando não tematizamos nossos rostos, essas ‘sensações’ anônimas não deixam de estar atuando continuamente na realização da experiência do rosto. Todavia, ao tematizarmos nossos rostos, isto é, ao voltarmos nossa atenção para elas, é capaz que consigamos registrar esses personagens anônimos. Talvez um ator seja alguém que, por exercício da profissão, tenha tematizado sobremaneira seu próprio rosto ao longo do aprendizado e do exercício do ofício, e, assim, conheça a experiência humana de rosto mais profundamente porque foi além dos polos de síntese que comumente dominam a experiência. Na prática esportiva, o atleta é desafiado a aprofundar sua imagem do próprio corpo para conseguir desempenhar as ações com a eficácia desejada. Ele mira a si mesmo e traz à luz a riqueza e a sutileza de possibilidades de movimentos e posturas. Chutar uma bola não é só a imagem visual do pé atingindo o alvo, mas um intrincado jogo de percepções que está além das imagens visuais e das palavras. Se não fosse assim, seria muito fácil ensinar alguém a andar de bicicleta. Mas, justamente, porque andar de bicicleta é uma experiência complexa e total, *interna*, há um limite que impede uma pessoa de, diretamente, ensinar outra a fazê-lo. A metodologia buscada é também uma utopia, pois, pretende, primeiramente, capacitar o pesquisador a descobrir sua própria esfera pré-predicativa, e, em seguida, capacitá-lo a comunicá-la a seus pares, objetivo que se torna ainda mais desafiante se considerarmos o exemplo da bicicleta. O que dizer da matemática? Quando estamos frente aos símbolos, definições, procedimentos da matemática, simultaneamente uma complexa cadeia de sentidos pré-predicativos corrobora na realização do que consideramos matemática. Seria possível tematizar tal cadeia de sentidos? Seria possível, a partir de uma metodologia descritiva e introspectiva em primeira pessoa que visa à origem da experiência em sua dimensão anônima, descortinar e explicitar os movimentos cognitivos profundos que estão envolvidos no fazer matemático pessoal e individual do pesquisador? E, se tal empreitada fosse ao menos esboçada, ela propiciaria uma elucidação do fazer matemático? Seria ela o fundamento de uma educação matemática em que professor e aluno fazem o difícil jogo de tentar, um ao outro, exporem suas anônimas e internas experiências pré-predicativas do conteúdo matemático em estudo? Ensinar matemática seria como ensinar a dançar ou a jogar golfe? Essas questões têm profunda relação com este trabalho, e podem ajudar nesse jogo

difícil em que o autor tenta expor suas anônimas e internas experiências pré-predicativas sobre matemática, educação e fenomenologia.

2 *Percepção de dependência, representação dinâmica de funções e uma abordagem pedagógica*

2.1 Considerações iniciais

Os papéis desempenhados pela percepção na existência humana são tão complexos e variados, que se pode mesmo questionar se é possível enumerá-los. O que dizer, particularmente, de sua ação no contexto da matemática? Quantas sutis manifestações não ocorrem aí? E quais as implicações disso para a educação matemática? O presente capítulo encerra a explicitação de um possível papel da percepção na educação matemática, catalisada pelo conceito matemático de função. Essa explicitação, por si só, já é algo relevante, visto que não se pode esperar que todas as influências da percepção sejam passíveis de serem delineadas de forma palpável. Duas grandes operações bem distintas se realizam ao longo do capítulo: um estudo de um sentido de percepção, e algumas propostas de aplicação desse conhecimento na educação matemática. O motivo pelo qual elas se acham reunidas em uma só unidade se deve ao fato de ambas versarem sobre o tema *função matemática*. Primeiramente, na Seção 2.2, é preciso delinear o sentido de *percepção de dependência*, um dos mais atuantes quando se trata de função matemática. Nesse ponto, ela é encontrada ainda fora do contexto da matemática, muito mais presente em situações corriqueiras do cotidiano. O encontro com a matemática não é trivial, e esse é o tema da Seção 2.3. Há, manifesta aí, uma intenção deliberada de restringir o sentido de função de forma a poder tratá-lo sob a circunscrição da percepção de dependência. Não só a restrição é necessária, mas também uma forma de projeção entre o domínio da matemática e o domínio da percepção, o que configura um certo tipo de *alegoria*. Daí falar-se em *sentido alegórico-perceptivo de função*. Esse movimento de trazer as idealidades matemáticas das funções para o campo perceptivo pode configurar uma estratégia de abordagem pedagógica, cujo princípio reside justamente na natureza da percepção. A Seção 2.4 é um exemplo completo de uma abordagem desse tipo, voltado para o tema das transformações lineares, que são um caso especial

de função. No bojo da abordagem mostrada, há uma representação dinâmica de função em operação. Na Seção 2.5, é discutida a relação entre representações dinâmicas e a representação gráfica de funções matemáticas. Nas considerações finais, apresento uma compreensão ampliada da intenção de mobilizar a percepção na prática educativa.

2.2 Percepção de dependência

Se existe um sentido de percepção especialmente atrelado à noção de dependência, ele deve ser passível de ser mostrado através de uma descrição devidamente elaborada para isso. A peça central desta seção é a descrição de uma experiência fictícia, inspirada em uma experiência real de psicologia, referente a percepções de movimento e causalidade. No trecho a seguir, Merleau-Ponty (2004, p. 36–37, notas suprimidas, nota de rodapé minha) descreve sucintamente tal experiência, interessado em mostrar como temos em nós sentidos que falam da vida animal:

[...][E]m um trabalho interessante sobre percepção do movimento, A. Michotte, de Louvain, mostrava que certos deslocamentos de traços luminosos sobre uma tela nos fornecem, indiscutivelmente, a impressão de um movimento vital. Se, por exemplo, dois traços verticais e paralelos se afastam um do outro, e se em seguida, enquanto o primeiro prossegue o seu movimento, o segundo inverte o seu e se recoloca, em relação ao primeiro, na posição inicial, temos irresistivelmente o sentimento de assistir a um movimento de reptação,¹ embora a figura exposta ao nosso olhar não se assemelhe em nada a um lagarta, e nem mesmo evoque sua lembrança. Aqui é a própria estrutura do movimento que se deixa ler como movimento “vital”. O deslocamento das linhas observado aparece a cada instante como um momento de uma ação global na qual um certo ser, cujo fantasma vemos na tela, realiza em seu proveito um movimento espacial. Durante a “reptação”, o espectador acredita ver uma matéria virtual, uma espécie de protoplasma fictício escorrer desde o centro do “corpo” até os prolongamentos móveis que ele lança diante de si.

Tendo esse relato como inspiração, proponho uma experiência fictícia para mostrar a percepção de dependência. Sejam diversos círculos dispostos aleatoriamente sobre uma área. Os círculos podem ser manipulados: quando tocados, eles podem acender ou não; além disso, eles podem ser movidos por toda a área. Às vezes, quando um círculo é acendido ou movido, outro círculo manifesta algum comportamento, como acender-se ou mover-se (Figura 9). O simples fato de um círculo responder a um evento ocorrido com outro círculo já é suficiente para estabelecer um sentido de *vínculo* entre eles. E isso se dá sob as condições mais frouxas possíveis: o comportamento não precisa nem necessariamente se repetir; não precisa seguir um padrão determinístico (por exemplo, ao se fazer o caminho inverso com o círculo manipulado, o outro

¹ *Reptação*: repto, “ato ou efeito de reptar, de opor-se; ação de desafiar, de provocar” (HOUAISS; VILLAR, 2001).

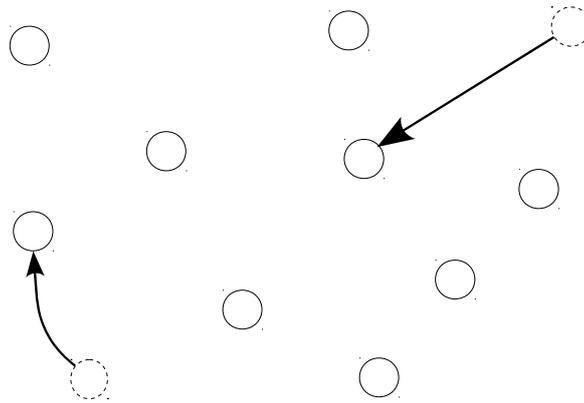


Figura 9: Experiência para mostrar a percepção de dependência.

círculo não precisa necessariamente fazer o seu caminho inverso); não precisa haver movimento (é o caso em que os círculos apenas acendem). Tudo se resume a eventos isolados e possivelmente não determinísticos. Em cada evento desses, a impressão de vínculo momentâneo se realiza. Esse sentido é perceptivo, ou seja, é originário: antes mesmo das palavras, nós já temos tal sentido em nosso mundo.

Além da experiência descrita anteriormente, a percepção de dependência pode ser observada em descrições de situações cotidianas, como nos relatos a seguir:

- Uma criança corre e pula. Ela quer alcançar mais longe. Ela repete o pulo empregando mais *força* em seu corpo e consegue o resultado. Essa criança *sabe de alguma maneira* que existe uma relação entre a força corporal do pulo e o alcance que se obtém nele. É uma relação que guarda certa proporcionalidade: quanto maior a força, maior a distância alcançada após o pulo. Em outras palavras, ela sabe que o alcance do pulo *depende* da força física que ela mobiliza. A caracterização pode ser um pouco mais complexa. Além da força física, há outros parâmetros que influenciam no resultado alcançado: a direção, a postura do corpo como um todo, especialmente os pés, etc. À medida que pula mais e mais, a criança aprende a reconhecer essas relações de forma tácita.
- Uma situação similar: uma criança lança uma pedra para atingir uma fruta. Novamente ela opera uma intrincada rede de dependências que incluem, agora, não apenas o conhecimento de seu próprio corpo, mas do ambiente também. Nesse caso, o vento é um parâmetro a mais para ser avaliado e compensado para se obter o resultado almejado. Se o vento sopra contra, é preciso aplicar uma força maior aproximadamente na mesma

direção em que ele vem e sentido contrário. É preciso dimensionar *quanto* de força a mais precisa ser empregada a partir de uma avaliação da velocidade do vento.

- Especificamente para este trabalho, é de interesse certa classe de exemplos. Trata-se do uso de utensílios de fabricação humana de todo tipo. Uma torneira guarda uma relação de dependência entre o ângulo de giro e a vazão de água que ela libera. Novamente essa relação é mais ou menos proporcional. É claro que a torneira tem limites. Em um extremo, ela fecha de vez, no outro, ela escancara. Muitas torneiras têm defeitos, vazamentos, comportamentos abruptos. As pessoas aprendem a conhecer as idiosincrasias das torneiras e compensam isso para obter o resultado almejado. Um registro de chuveiro elétrico é ainda mais interessante, pois mostra uma conjunção de dependências, visto que, além da vazão, a temperatura da água está em jogo. Na operação do registro, fica claro que as pessoas *entendem* essas dependências.
- A sintonia de um receptor de rádio (o *dial*), lembra uma torneira por causa do *knob*, a peça arredondada que também precisa ser girada, e porque a operação também está limitada de um lado e de outro. Em receptores antigos, o *dial* tinha uma escala graduada de frequências percorrida por uma seta indicadora que se movia *em função do* giro do *knob*. Dispositivos eletroeletrônicos são repletos de controles que apelam para esse sentido de percepção de dependência: o controle de volume do aparelho de som, o controle de velocidade do ventilador, etc.
- Antes deles, já havia os dispositivos puramente mecânicos. Uma persiana pode ter suas paletas giradas mediante o deslizar de uma corda. A medida do giro pode ser controlada pela distância de corda puxada. E há muito mais: janelas de automóveis, o acelerador, a embreagem e o freio, a percepção da relação de marcha na propulsão, etc.

Em suma, seres humanos estão a todo tempo reconhecendo e operando relações de dependência. E o fazemos com absoluta espontaneidade, como se fizesse parte de nós, como se fosse uma característica natural e profundamente presente em nós.

Várias palavras foram ou poderiam ser empregadas para designar essa noção que se busca mostrar: vínculo, dependência, causalidade, etc. Há sutis diferenças de sentidos de significação nessas palavras que impedem que sejam tratadas como sinônimos. O sentido de dependência sempre implica um sentido de causalidade, mas seria o inverso verdadeiro? Sem a pretensão de ter um entendimento final das intrincadas relações entre esses sentidos possíveis, adoto o termo *dependência* daqui para frente. Pesa nessa escolha, certamente, a intenção de tratar funções matemáticas mediante esse sentido.

Um aspecto sutil, porém importantíssimo, do sentido de dependência é que nele se manifesta um sentido de forma, isto é, as dependências percebidas podem ser diferenciadas por seu comportamento, como se elas tivessem forma. Isso é fundamental para a aplicação pedagógica que se propõe neste capítulo.

Esta seção encerra uma pequena tese dentro da tese. O que emerge daqui é a noção de percepção de dependência. *Isso é um resultado esperado*: encontrar, delinear, apontar esse fenômeno e dar-lhe um estatuto de destaque dentro da experiência humana. E, no entanto, para fundamentar algo tão sério, foram despendidas umas poucas páginas, com descrições informais de situações corriqueiras. O leitor deve deixar de lado, neste trabalho, os sentidos habituais de metodologia de pesquisa, mais cerimoniosos, muitas vezes. A razão de um resultado tão importante poder ser justificado de forma tão leve vem do princípio metodológico segundo o qual aquilo que quer se mostrar revela-se de forma evidente na experiência de quem toma contato com a descrição.

2.3 Sentido alegórico-perceptivo de função matemática e representação dinâmica de funções

Não há como relacionar percepção e matemática sem incorrer em questões mais amplas, associadas à filosofia da matemática. Grande parte das questões da filosofia da matemática surgem do contraste entre matemática e realidade. Por exemplo, pode-se questionar como a matemática consegue descrever tão bem certos aspectos da realidade física, sendo ela—a matemática—algo da esfera das idealidades mentais. Entre tantas variações dessas questões, este trabalho pende mais para a categoria em que se busca entender a matemática a partir da cognição humana. Um conhecido exemplo dessa linha de pensamento é o trabalho de Lakoff e Núñez (2001). Segundo os autores, os processos neurofisiológicos humanos empregados na vida cotidiana atuam também no pensamento matemático abstrato. É possível que Merleau-Ponty endossasse essa ideia, ainda que não necessariamente pelos mesmos motivos. Segundo essa linha de pensamento, talvez a percepção de dependência, apresentada na Seção 2.2, pudesse ser apontada, então, como o elemento mais atuante na cognição humana quando o indivíduo faz matemática envolvendo funções. Ela está de acordo, também, com o movimento que realizo na Seção 1.5.

Contudo, para os fins pedagógicos pretendidos neste capítulo, podemos deixar de lado se a percepção é ou não fator atuante na cognição de funções matemáticas. Para aliar idealidades matemáticas e sentidos de percepção, basta reconhecer que há um processo de representação

em jogo. Embora o conceito de função matemática seja da esfera das idealidades, ele pode ser *representado* de forma conveniente no mundo percebido. O processo como um todo não passa de uma forma de projeção, ou morfismo, entre dois domínios: a matemática e o campo da percepção de dependência. Obviamente, isso favorece certos sentidos de função matemática em detrimento de outros. Mediante a representação proposta aqui, uma função matemática ganha um sentido muito mais voltado para dependência funcional do que para qualquer outro (correspondência, algoritmo, etc.). Isso é discutido, de passagem, na Seção 1.2. Por ser um sentido projetivo, ele bem poderia ser rotulado de sentido *figurado* ou sentido *alegórico*. Uma *figura*, seja como imagem, seja como figura de linguagem (metáfora, metonímia, etc.), é sempre algo que representa outro. Já a alegoria revela uma intenção de se falar de uma coisa, recorrendo-se a outra.² No caso, o sentido projetivo é uma alegoria, no mundo percebido, do sentido de função na matemática. Esse sentido é dito *perceptivo* pois se trata de uma percepção. Assim, em suma, o *sentido alegórico-perceptivo de função* se manifesta quando o conceito de função matemática é representado em uma forma mediante a qual ele se torna passível de uma percepção de dependência.

No centro das alegorias de função propostas neste trabalho, sempre há uma representação dinâmica de função, que também pode ser vista como uma forma de manipulativo, a que se atribui o nome de *funcionete*. Eles lembram os dispositivos corriqueiros comentados na Seção 2.2, como torneiras, controles de volume, etc., com a vantagem de apresentarem comportamentos mais complexos do que o comportamento proporcional básico. Na Seção 2.4, o funcionete empregado manifesta uma dependência entre as posições de peças que se situam em planos, e é, por isso, chamado de *funcionete plano*. Ele é implementado como um programa de computador, e permite o trabalho pedagógico com transformações lineares. Na Seção 2.5, aparece, como ideia, um funcionete simples, mas que não chegou a ser implementado.

A ideia principal apresentada nesta seção é exemplificada ao longo de todo o restante do capítulo, em que as funções matemáticas aparecem alegoricamente projetadas no campo de percepção de dependência.

²O termo *alegoria* vem do “grego *allegoría*, as ‘alegoria, linguagem figurada’, derivado de *állos* ‘outro’ + *agoreúō* ‘falar em público; falar, dizer; proclamar’, e este de *agorá* ‘assembleia, praça pública’” (HOUAISS; VILLAR, 2001).

2.4 Abordagem pedagógica para o ensino de funções a partir da percepção de dependência

O sentido alegórico-perceptivo de função matemática pode ser o princípio de uma abordagem pedagógica para o ensino de funções: isso é o que se pretende explorar nesta seção. A abordagem pedagógica que aqui se apresenta é muito mais um exercício especulativo em torno de possibilidades do que um relato de experiências concretas com resultados; é muito mais uma sugestão do que uma prescrição. Não houve aplicação efetiva dessas ideias em situações didáticas reais ou de pesquisa. Ainda assim, é possível discutir teoricamente a respeito, explicitando princípios, fundamentos e justificativas.

O proveito pedagógico principal em se trazer uma função matemática para o campo de percepção de dependência está em criar, para o aluno, um sentido diferenciado de tal conceito e também de toda uma série de conceitos, propriedades, teoremas, etc. associados a ele. Não é apenas a função matemática que ganha um sentido especial no campo de percepção, mas todo um corpo de conhecimentos. Esses sentidos perceptivos não vêm para concorrer ou substituir os sentidos matemáticos, nem para tornar as coisas mais fáceis ou melhores: eles são apenas uma alternativa a mais no repertório do educador matemático. Até porque não está claro que se possa explorar toda a diversidade das funções matemáticas por este caminho. Há, sim, *alguns fatos* da teoria de funções que cabem bem nessa abordagem. E, além disso, certos conceitos podem perder significância quando apresentados sob um sentido estritamente alegórico-perceptivo. *O princípio fundamental em buscar o sentido alegórico-perceptivo de funções em uma abordagem pedagógica reside no fato de que todos os conceitos, propriedades, teoremas, etc. da teoria de funções que são passíveis de serem representados no campo de percepção de dependência se tornam evidentes aí, mas não evidentes no seu sentido matemático, e, sim, no sentido perceptivo, que, por sua vez, pode se constituir em um ponto de ancoragem para que o educador matemático ressalte o sentido matemático.* A evidência do sentido perceptivo é justificada pela fenomenologia da percepção vista no Capítulo 1.

Tudo isso é exemplificado com uma sequência pedagógica fictícia criada em torno do conceito de transformação linear, que é um tipo de função. Transformações lineares são um dos tópicos centrais do ensino de álgebra linear.³ Elas foram escolhidas por terem viabilizado uma produção variada de situações didáticas. A representação alegórico-perceptiva de transformação linear, isto é, o manipulativo empregado, recebe o nome de *funcionete plano* (Seção 2.4.1).

³As definições de álgebra linear que constam neste trabalho estão adaptadas para uma linguagem não técnica, embora tenha se procurado manter a correção das mesmas. A referência adotada é Boldrini et al. (1986).

Foi criado e desenvolvido para este trabalho.⁴ As atividades apresentadas referem-se a conceitos ou propriedades como: o conceito de autovetor de um operador (transformação) linear (Seção 2.4.2), o conceito de núcleo de uma transformação linear (Seção 2.4.3) e a propriedade de linearidade (Seção 2.4.4). A exposição das atividades segue um procedimento comum: inicialmente define-se o conceito ou propriedade de forma resumida e não técnica; em seguida, enunciam-se os sentidos alegórico-perceptivos de fatos relevantes que poderiam ser observados a partir das atividades; por fim, os sentido alegóricos-perceptivos são associados aos sentidos da álgebra linear. Na descrição das atividades, abuso de um falso realismo, como se tudo fosse efetivamente ser aplicado e os resultados tivessem sido observados de fato, mas é apenas por uma questão de estilo. Todas as situações apresentadas são hipotéticas e refletem expectativas, nada mais que isso. No final (Seção 2.4.5), há um apanhado dos fatos relevantes apontados nas atividades e uma discussão adicional sobre a proposta principal da seção.

Vale a pena observar, antecipadamente, que não é apenas a percepção de dependência que atua nas alegorias expostas. Vários tipos de percepção estão implícitos, especialmente aqueles de natureza visual e geométrica, como percepção de paralelismo, coincidência de pontos, etc. A atuação deles não é analisada e fica subentendida, pois isso não compromete o objetivo da apresentação.

2.4.1 Funcionete plano

O manipulativo empregado nas alegorias de transformações lineares é o *funcionete plano*. Trata-se de um conjunto formado por duas áreas planas sobre as quais correm pinos, um pino em cada área plana. Além disso, os pinos apresentam um comportamento bem delineado: a posição de um deles em sua área plana depende da posição do outro em sua respectiva área. Porém, não é que ambos, ao mesmo tempo, sejam condicionados um pelo outro. Há um que é sempre o pino independente enquanto o outro é o dependente; não faz sentido esperar que houvesse uma relação recíproca, isso é, uma ação sobre o pino dependente causasse uma resposta no pino independente. Só para enfatizar: a única operação possível é mover a posição do pino independente e observar a resposta do pino dependente.

Cada funcionete plano guarda uma *lei de formação* diferente, isto é, o comportamento do pino dependente em relação ao outro pino pode ser completamente distinto de funcionete plano para funcionete plano. Visto que eles são diferentes, eles recebem nomes para identificá-los.

Quanto à implementação prática de funcionetes planos, pode-se especular sobre muitos

⁴Goldenberg, Lewis e O'Keefe (1992) mencionam a existência de DynaGraphs de duas ou mais dimensões, que poderiam ser similares.

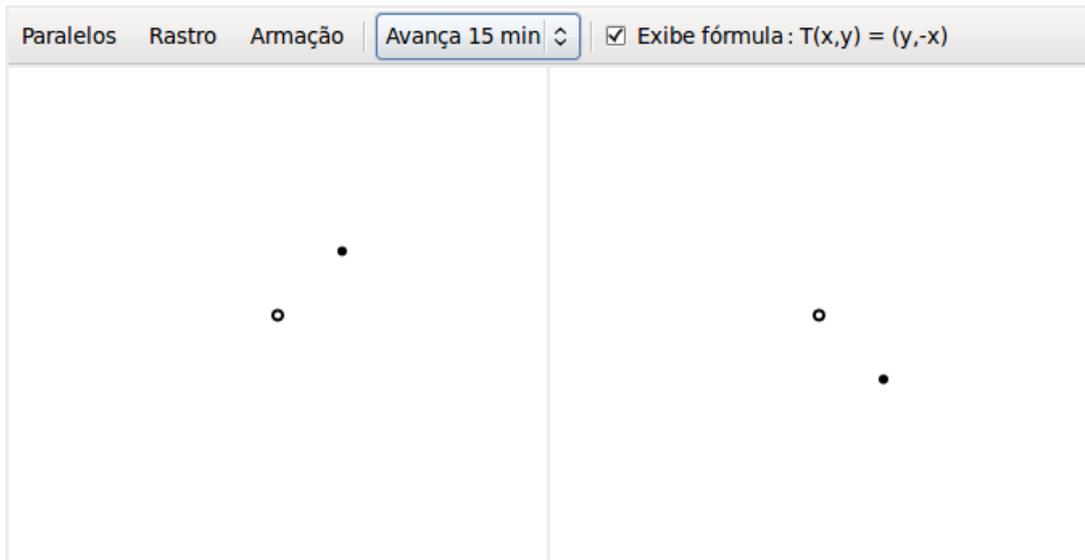


Figura 10: Funcionete plano.

esquemas possíveis. Por exemplo, os pinos poderiam ser pontos específicos de gerigonças parecidas com pantógrafos, projetadas especialmente para comportar-se segundo leis de formação desejadas. Projetar tais gerigonças seria um bom exercício de engenharia mecânica e de geometria aplicada. Como prova de conceito, neste trabalho, os funcionetes planos foram implementados em programas de computador sem que os pinos demonstrem qualquer relação causal explícita entre si, isto é, os pinos aparecem isolados um do outro, ainda que, na movimentação, seja observável a dependência de um em relação ao outro, como *mágica*. A Figura 10 é uma imagem do programa gerado, em que o funcionete plano aparece como um painel em que duas áreas planas estão posicionadas lado a lado horizontalmente, separadas por uma linha vertical. Em cada área, é indicada a origem das coordenadas do plano, como pequenos anéis no centro, embora não haja indicação de eixos nem medidas. Os pinos são círculos preenchidos posicionados em algum lugar do plano. A operação básica de um funcionete plano consiste em movimentar o pino independente e observar a resposta do pino dependente. Infelizmente, o texto impresso é um meio limitado para reproduzir essa vivência.⁵ A ideia é que o aluno tenha uma experiência direta da lei de formação da transformação linear, através da exploração de toda a área do domínio, e que fatos relevantes se mostrem de forma evidente para ele com esse recurso. Para enfatizar certos objetivos especialmente visados, *acessórios* especiais podem ser adicionados ao funcionete plano básico. Na Figura 10, nota-se uma barra de ferramentas na parte superior. À esquerda da referida barra, aparecem três botões que acionam os acessórios criados

⁵Goldenberg, Lewis e O’Keefe (1992, p. 235, tradução minha) manifestam essa mesma frustração: “estamos discutindo representação dinâmica mas não temos como *mostrá-la*: o papel é uma mídia estática, que não possibilita a visualização dinâmica. Portanto, a dinâmica de que falamos deve ser recriada por você na sua cabeça à medida em que lê”.

para as atividades pretendidas. O botão “Paralelos” faz aparecer os segmentos que ligam os pinos às suas respectivas origens; esses segmentos têm a curiosa propriedade de avisar quando ficam paralelos. Esse acessório é usado na atividade de autovetores. O botão “Rastro” habilita a funcionalidade mediante a qual o pino independente, ao ser movido, deixa um rastro ao longo da trajetória percorrida. Esse acessório é usado na atividade de núcleo de transformação linear. O botão “Armação” faz aparecer três segmentos no plano do pino independente, sendo que um deles é a somatória vetorial dos outros dois; ao mesmo tempo, suas imagens são mostradas no plano do pino dependente; nesse plano, aparece ainda um quarto segmento, referente à somatória das imagens dos dois segmentos (Figura 14). Com esse aparato, é possível fazer uma atividade sobre a propriedade de linearidade da transformação linear. Na barra de ferramentas, aparecem ainda uma caixa de seleção de funcionete plano, que na figura aparece com o nome do funcionete plano ativo no momento (“Avança 15 min”), e a opção de visualização da fórmula empregada na implementação do funcionete, que corresponde à sua lei de formação. Nos exemplos desta seção, os nomes dados aos funcionetes planos descrevem o comportamento causado por sua lei de formação: Avança 15 min, Ladeira, Espelho e Descola. No Avança 15 min, o pino dependente está sempre 90 graus avançado no sentido horário. No Ladeira, o pino dependente fica confinado a uma reta que passa pela origem com inclinação negativa. No Espelho, os pinos ficam simétricos em relação ao eixo que separa os planos. No Descola, a transformação não é linear; a razão do nome é explicada na atividade sobre linearidade.

Funcionetes planos só servem de alegorias para transformações lineares que levam de um espaço de dimensão igual a dois para outro espaço de dimensão igual a dois. Obviamente, isso se deve à dificuldade—ou até mesmo impossibilidade—de se implementar espaços de dimensões maiores que dois. A expectativa, no entanto, é de que as transformações lineares de plano em plano propiciem exemplos marcantes dos conceitos apresentados nos sentidos alegórico-perceptivos, e que apoiem uma generalização das ideias para dimensões diferentes.

2.4.2 Autovetores de um operador linear

Só faz sentido falar em autovetores quando a transformação linear ocorre de um espaço para ele mesmo. Nesse caso, a transformação linear é chamada de *operador linear*. Os funcionetes planos podem se encaixar nesse critério, visto que a dimensão do plano do pino independente é a mesma do outro plano. Melhor seria se os planos estivessem sobrepostos, mas o fato de estarem separados não constitui um empecilho. Uma área mostra o plano com o vetor a ser transformado; a outra área mostra o mesmo plano apenas com o vetor transformado. Essas considerações podem ser assumidas tacitamente em um primeiro momento da apresentação da

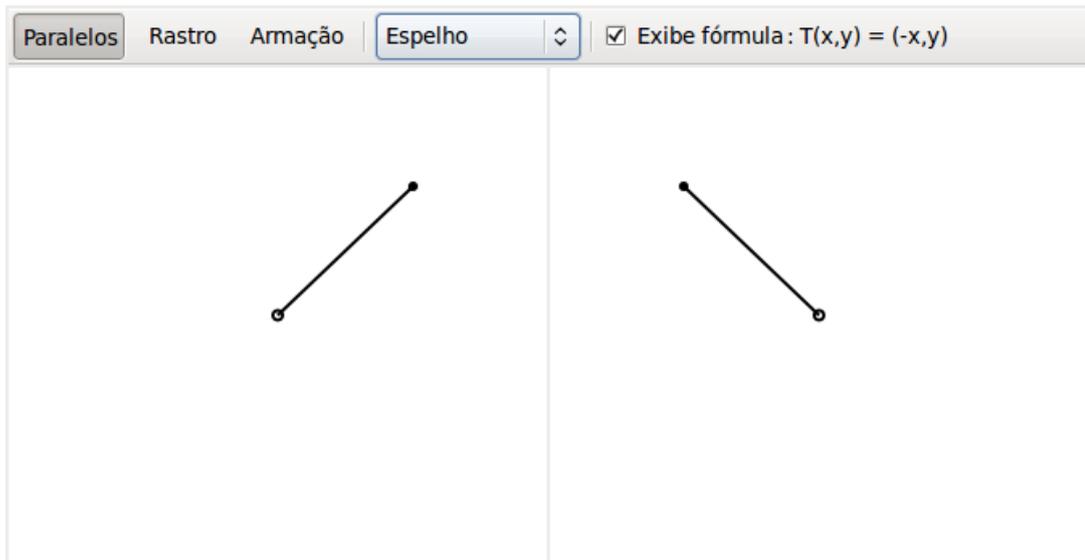


Figura 11: Funcionete plano com acessório de segmentos paralelos.

atividade.

Diz-se que um operador linear (transformação linear) tem autovetor se existir um vetor tal que a sua imagem segundo a transformação seja um vetor de mesma direção (embora, não necessariamente de mesmo sentido e comprimento).

O acessório dos segmentos paralelos deve ser acionado através do botão “Paralelos”. Aparecem dois segmentos que ligam os pinos à origem (Figura 11). Durante a movimentação, se acontecer de os dois segmentos ficarem paralelos, surgem contornos em torno dos segmentos (Figura 12). Os contornos permanecem enquanto os pinos estiverem aproximadamente paralelos, com um certo grau de tolerância.

Um experimento de ensino montado para exercitar esse recurso poderia ser da seguinte forma: o aluno tem à disposição uma série de funcionetes planos. Para cada um deles, utilizando o acessório, ele explora o plano da esquerda com o pino independente, tentando identificar situações em que o acessório acusa paralelismo entre os segmentos. Algumas observações que poderiam ocorrer na exploração:

1. *Em certos casos, o acessório não acusa paralelismo.* Por exemplo, com o funcionete plano Avança 15 min, que é uma rotação de 90 graus no sentido horário, o pino dependente está sempre à frente do independente, nunca o alcançando, isto é, nunca ficando paralelo a ele.
2. *Sempre que o acessório alarma numa direção e sentido, ele alarma também na mesma direção e sentido contrário.*

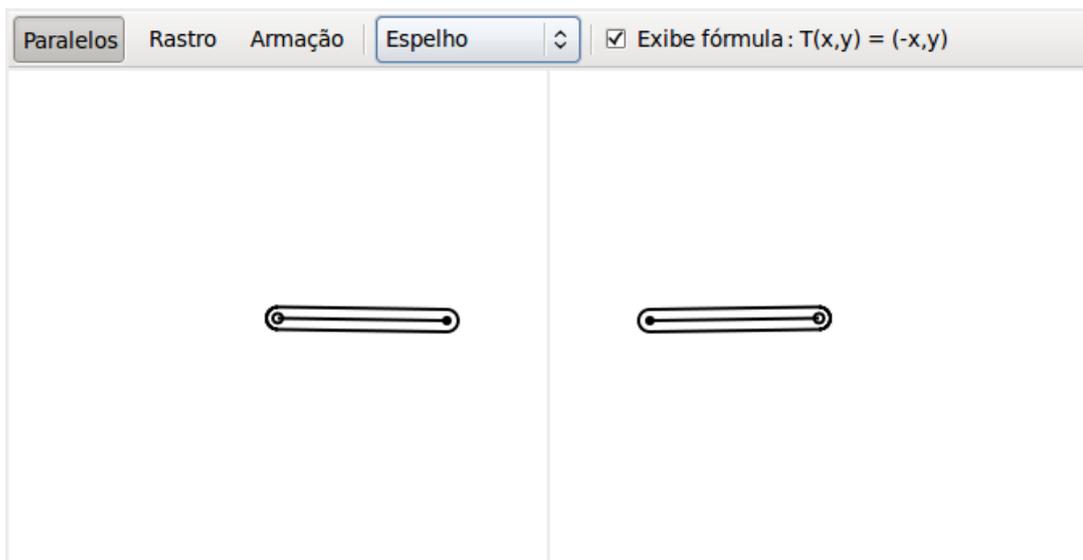


Figura 12: Momento em que os segmentos do funcionete plano ficam paralelos.

3. *Há casos em que o acessório só alarma em uma direção*, como é o caso do funcionete plano Ladeira.
4. *Há casos em que o acessório alarma em duas direções*, como é o caso do funcionete plano Espelho

Todos esses fatos observados acontecem do campo de percepção e são aqui descritos com os sentidos apreendidos nele. Cada fato é correlato a um conceito, propriedade, teorema, etc. O segmento que liga o pino independente à origem no momento que o acessório Paralelos alarma é o correlato do conceito de autovetor. Além disso, as observações enumeradas acima correspondem aos seguintes fatos na teoria matemática:

1. Nem todo operador linear tem autovetores. Isso está de acordo com a definição, que é condicional: *se existir...*
2. O vetor oposto a um autovetor também é um autovetor.
3. Há operadores de duas dimensões que só possuem autovetores em uma direção.
4. Há operadores de duas dimensões que possuem autovetores em duas direções.

2.4.3 Núcleo de uma transformação linear

Núcleo de uma transformação linear é o conjunto de todos os vetores do domínio da transformação cujas imagens resultam no vetor nulo. Uma atividade exploratória a respeito de

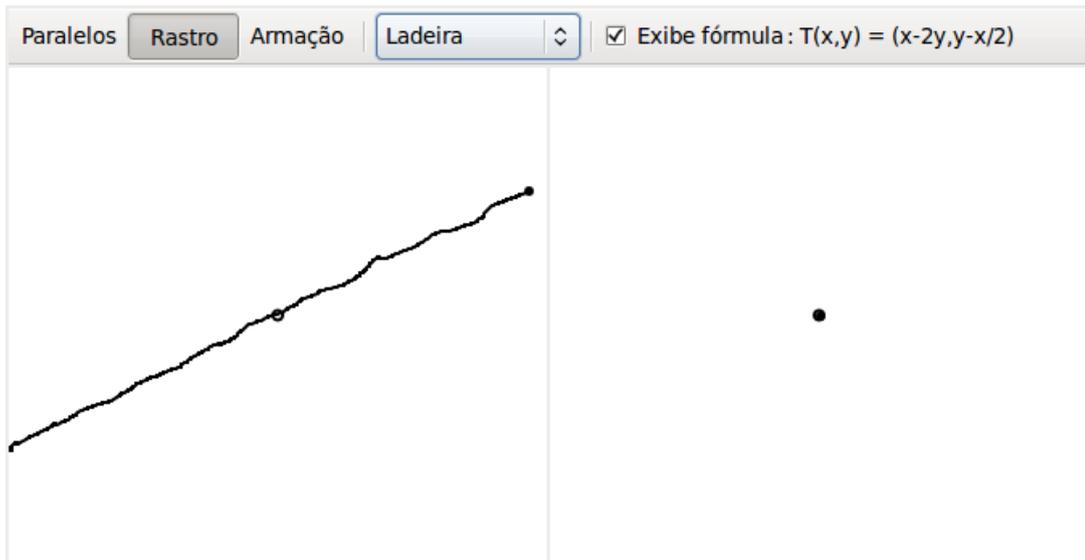


Figura 13: Resultado obtido com a ferramenta Rastro. A linha traçada corresponde ao núcleo da transformação linear associada ao funcionete plano.

núcleos consiste em tentar identificar tais conjuntos em vários funcionetes planos. Para isso, em cada manipulativo, deve-se varrer o plano do pino independente tentando fazer com que o pino dependente mantenha-se na origem de seu plano.

Os sentidos perceptivos relevantes que podem emergir de tais observações são os seguintes:

1. *Nem sempre é possível realizar a operação de forma a obter um conjunto interessante.* Em muitos funcionetes planos, a única possibilidade de conseguir o efeito desejado é manter o pino independente na origem; fora disso, o pino dependente não se mantém na origem.
2. *Quando há respostas interessantes, elas sempre aparecem como retas passando pela origem.* Há casos em que é possível manter o pino dependente na origem varrendo pontos específicos com o pino independente. Uma curiosa propriedade salta aos olhos então: tais pontos parecem descrever uma reta. Para ressaltar esse fato, deve-se usar o acessório "Rastro". Na Figura 13, vê-se o resultado da ação dessa ferramenta. A linha mostrada no plano esquerdo da figura foi obtida movimentando-se o pino correspondente de modo a manter o pino do lado direito na origem. Como esse é um processo de tentativa e erro, o rastro exhibe pequenos desvios, que logo são corrigidos retornando a uma trajetória esperada.
3. *Quando o núcleo é não trivial, a imagem tem dimensão unitária.* Esse fato é descrito e analisado em separado na Seção 2.4.5.

A partir desses sentidos perceptivos, é possível salientar certos sentidos matemáticos. Em primeiro lugar, é preciso enfatizar a alegoria fundamental, isto é, a de que o conjunto de pontos que se obtém através da operação com funcionete plano corresponde ao núcleo de uma transformação linear. Além disso, os fatos enumerados acima ganhariam as seguintes formulações no domínio da matemática:

1. Há transformações lineares cujo núcleo é trivial, isto é, resume-se apenas ao vetor nulo no domínio.
2. Há transformações lineares de plano em plano cujo núcleo é um espaço linear de dimensão unitária.
3. O teorema do núcleo e da imagem, segundo o qual a soma das dimensões do núcleo e da imagem coincide com a dimensão do domínio. Esse caso é analisado na Seção 2.4.5.

2.4.4 Propriedade de linearidade

Uma transformação T é linear se e somente se, para quaisquer vetores u e v e qualquer escalar k , valem as duas propriedades: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ e $T(k \times u) = k \times T(u)$. A primeira propriedade, a da soma, pode ser observada com funcionetes planos habilitados com o acessório Armação. Na Figura 14, vê-se o funcionete plano com a armação de vetores para soma. Os segmentos u e v podem ser movidos separadamente. O segmento $u + v$ é a soma vetorial resultante dos dois e não reage a comandos de movimento feitos diretamente nele. No lado oposto, têm-se as transformações dos três segmentos mais a soma das imagens $T(u)$ e $T(v)$. O funcionete plano da figura, chamado Descola, não corresponde a uma transformação linear, pois ele não atende às propriedades. Isso pode ser observado visualmente pelo fato de $T(u + v)$ não coincidir com $T(u) + T(v)$. Na Figura 15, o funcionete plano corresponde a uma transformação linear. Movendo-se os segmentos para quaisquer posições, a coincidência entre $T(u + v)$ e $T(u) + T(v)$ sempre se mantém.

2.4.5 Discussão

Das três atividades propostas e das observações possíveis em cada uma, que foram hipoteticamente levantadas, vê-se, em ação, o princípio apontado no começo da seção. De fato, os sentidos perceptivos dos fatos observados são diferenciados. Uma coisa é tomar conhecimento, por exemplo, da definição de autovetor de um operador linear e atentar para o fato de que ela é condicional, ou seja, que nem todo operador linear tem autovetores, outra coisa é saber isso

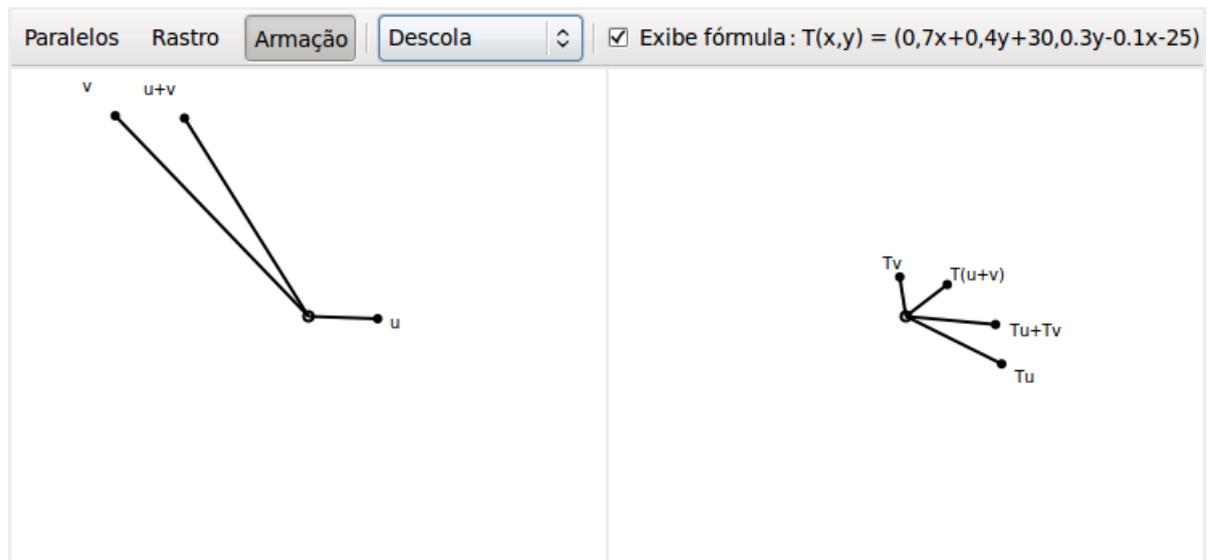


Figura 14: Funcionete plano com acessório para alegoria da propriedade de linearidade. O funcionete plano ilustrado não corresponde a uma transformação linear.

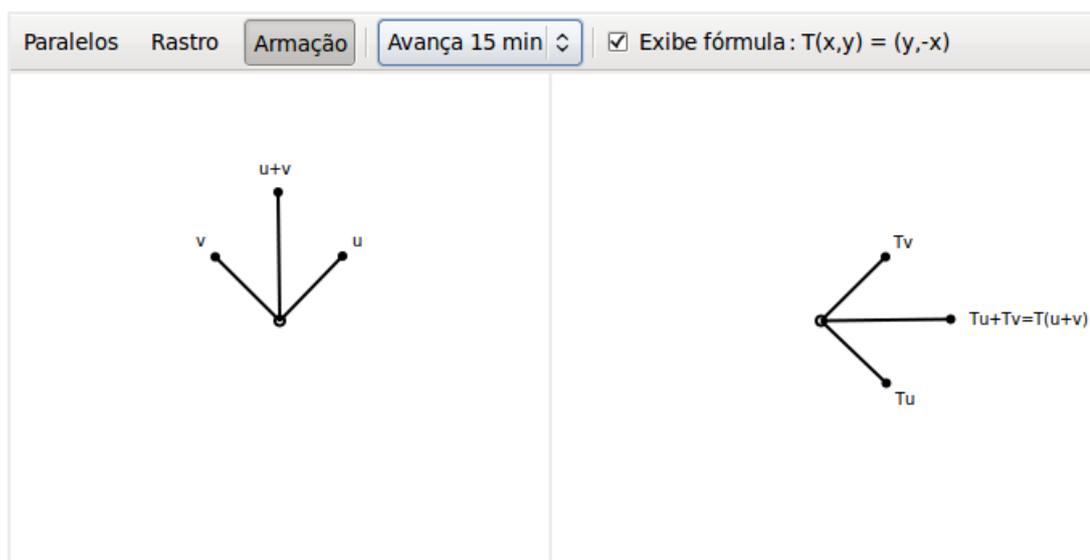


Figura 15: Funcionete plano que corresponde a uma transformação linear.

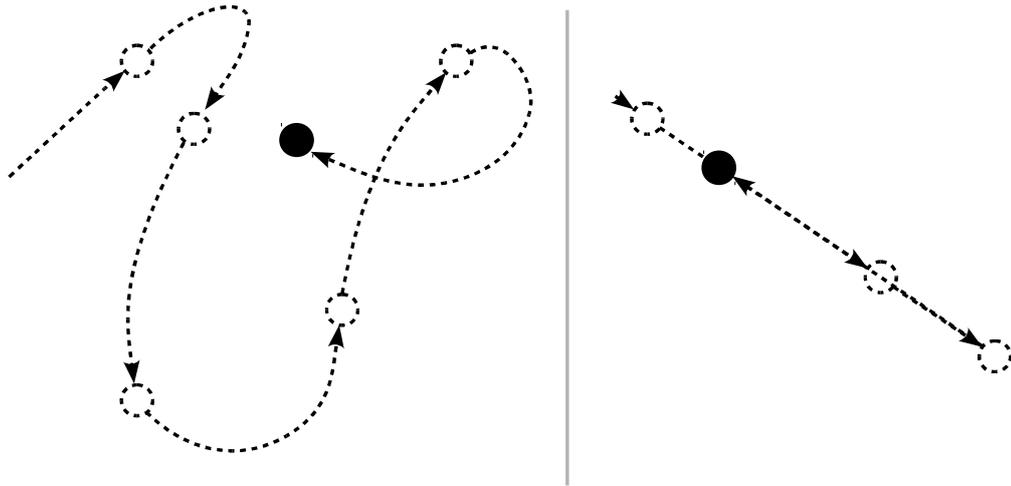


Figura 16: Ilustração do efeito percebido em funcionetes planos de núcleo não trivial.

diretamente por ter experimentado alguns funcionetes planos. Não é o mesmo sentido, embora eles tenham uma relação entre si. Outro fato que chama a atenção é a *concretude* que o núcleo de uma transformação linear pode assumir. No entanto, todas essas observações já eram esperadas por mim desde o princípio, exceto uma, que comento em breve. Portanto, elas não foram descobertas autênticas, realizadas com os novos sentidos. Não que se esperasse isso, afinal é tudo um exercício de imaginação. Porém, como havia a presença de funcionetes planos, eu tive a oportunidade de exercitar a ideia e descobrir algo, também. São três casos, que passo a descrever em seguida.

O caso mais notável aconteceu na atividade sobre o núcleo de transformação linear, e é mencionado na Seção 2.4.3. Eu não esperava observar o fato de que, quando o núcleo é não trivial, a imagem da transformação linear é uma reta. Em geral, quando se passeia com o pino independente pelo domínio do funcionete plano, o pino dependente responde movendo-se coerentemente, mas nem sempre mostrando um padrão específico. No caso em questão, é diferente, pois o pino dependente comporta-se como se estivesse confinado em uma reta. A Figura 16 é uma tentativa de comunicar a percepção do movimento de ambos os pinos: o lado esquerdo representa uma possível movimentação do pino independente e o lado direito, a resposta a esse movimento. Embora a movimentação do pino independente seja livre, o pino dependente descreve uma reta como aquela mostrada no lado direito da figura. A tomada de consciência desse fato é o primeiro acontecimento relevante, mas não o único. Ao tentar entender o que se passava, eu descobri que havia tropeçado no teorema do núcleo e da imagem de uma transformação linear. Só que ele se revelou para mim, nessa experiência, com um sentido que eu desconhecia nos estudos que fiz de álgebra linear na graduação e na pós-graduação. E, principalmente,

esse novo sentido deixou claro para mim a justificção do teorema, de uma forma mais fácil de lembrar, como eu jamais havia conhecido. Posso resumir tal justificção da seguinte forma: durante a experimentação eu tive uma forte sensação de projeção,⁶ isto é, como eu movimentava o pino independente livremente, mas o pino dependente parecia preso a uma reta, era como se este fosse um tipo de projeção daquele. Não uma projeção necessariamente ortogonal, com uma lei explicitamente compreensível, mas um tipo de projeção. É fácil reconhecer a similaridade ao se pensar que, numa projeção ortogonal do tipo componente horizontal ou componente vertical, também move-se o ponto livremente, mas a componente em si fica atrelada a um eixo ou outro. Dessa forma, na operação com funcionetes planos de núcleo não trivial, uma reta inteira do domínio é levada para um único ponto da imagem, ou, em outra palavras, cada ponto da reta da imagem é o mapeamento de uma reta inteira do domínio. Assim é com a projeção de coordenadas do plano cartesiano também, pois, por exemplo, todos os pontos da reta $x = 1$ no referido plano têm como abscissa (coordenada horizontal) o ponto $(1,0)$. Ora, mas esse princípio conduz diretamente para a ideia de núcleo, pois núcleo de uma transformação linear é o conjunto que é mapeado para a origem. A origem faz parte da reta da imagem, logo, ela também é o mapeamento de um conjunto de pontos no domínio, e esse conjunto é o núcleo. Assim, porque há um tipo de projeção, há todo um conjunto que é mapeado para a origem, ou seja, há um núcleo não trivial. O teorema fala em dimensões. Ora, uma projeção é necessariamente uma perda de dimensionalidade, pois navega-se em duas dimensões no domínio, no caso dos funcionetes planos utilizados, e obtém-se um comportamento de uma dimensão na imagem (reta). É claro que o teorema diz mais, ele permite relacionar quantas dimensões foram perdidas com a própria dimensão do núcleo, mas isso é difícil de explorar com funcionetes de apenas duas dimensões. Ainda assim, é possível estender esse resultado apelando-se para a imaginação. Então, resumindo, quando há uma perda de dimensão na transformação linear (isto é, a dimensão da imagem é menor que a dimensão do domínio), há um efeito de projeção, e, portanto, há um conjunto inteiro (o núcleo) que é mapeado (ou projetado) para a origem. No fundo, já está tudo lá na definição puramente matemática do teorema, mas a noção de que a perda de dimensão era um tipo de projeção nunca havia se destacado para mim. Só a manifestação de uma compreensão diferente do teorema na atividade já é um fato indicativo do princípio apontado no começo da seção, isto é, de que os sentidos alegórico-perceptivos são diferenciados, e que eles podem se constituir em um ponto de ancoragem para os sentidos matemáticos.

As outras descobertas inesperadas com o exercício de funcionetes planos mostram como

⁶Tecnicamente, teria sido melhor empregar o termo *percepção de projeção*, mas o apelo do sentido da palavra *sensação* consagrado pelo uso foi mais forte.

nem sempre uma abordagem estritamente alegórico-perceptiva é puramente benéfica. Na atividade de autovetores, um dos fatos observados é de que um vetor oposto, em relação à origem, a um autovetor também é um autovetor. Isso corresponde a um teorema, que no entanto, é mais amplo: não apenas um vetor oposto, mas qualquer vetor de mesma direção, basta que tenha comprimento diferente. Na operação do funcionete simples, de fato, ao mover-se o comprimento do autovetor, a sua imagem também permanece paralela ao novo vetor, e isso é a manifestação do teorema. Porém, o problema foi que essa alteração de comprimento não foi percebida como uma mudança de vetor. Embora o comprimento fosse diferente, tudo se passava como se fosse a mesma *peça*, escondendo o fato de que o comprimento estava sendo alterado.

O outro acontecimento, que é bem menos grave do ponto de vista da educação matemática, é interessante porque remete a uma propriedade da percepção mencionada por Merleau-Ponty. Os funcionetes planos foram criados principalmente para propiciar vivências das diferentes leis de formação das transformações lineares. É desejável que haja uma grande atenção na relação entre os pinos independente e dependente ao longo da exploração do domínio. No entanto, por característica da percepção e da sua relação com instrumentos, essa relação tende a ser escondida. Esse comportamento se mostrou, especialmente, no traçado do rastro do núcleo da transformação linear. Durante essa operação, toda a atenção se concentra no pino dependente, que tem que permanecer na origem. Enquanto isso, move-se o pino independente, mas pouca consciência se tem disso. É semelhante ao uso do lápis. Toda a atenção está na ponta. Embora movimentemos nossos dedos e mãos, eles se perdem na operação e é como se a ponta do lápis fizesse parte de nós. “A bengala do cego deixou de ser para ele um objeto, ela não é mais percebida por si mesma, sua extremidade transformou-se em zona sensível, ela aumenta a amplitude e o raio da ação do tocar, tornou-se o análogo de um olhar” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 198).

Isso encerra a exemplificação de uma abordagem pedagógica e a discussão de seus princípios. Todas as atividades ilustradas giram em torno do conceito de transformação linear. Para efeito de mostra de exemplos, é suficiente, mas teria sido mais rico se outros funcionetes tivessem sido implementados, o que teria permitido ampliar o leque de assuntos e reforçado a ideia que se quer mostrar. Entre esses conteúdos, estão inclusos as propriedades de injetividade e subjetividade de funções, as operações de composição e inversão de funções, o enunciado da definição de limite de uma variável, um método de integração discreta de equações diferenciais de primeira ordem, etc. Reconheço em todos eles a mesma efetividade dos princípios aqui apontados.

2.5 Representações dinâmicas e a representação gráfica de funções

Uma discussão à parte, que favorece a compreensão do papel da percepção de dependência no ensino de funções, é a relação entre as representações dinâmicas e a representação gráfica. É evidente que a representação gráfica de funções envolve, no mínimo, sentidos de percepção visuais, como o sentido de forma, mas cabe perguntar se a percepção de dependência teria claramente algum papel nesse contexto. O propósito visado nesta seção é mostrar, como possibilidade, uma forma de empregar representações dinâmicas para auxiliar no entendimento de uma representação gráfica, sugerindo, desse modo, que a percepção de dependência pode atuar na experiência da representação gráfica.

Scheffer (2002) apresenta uma experiência com dispositivos de medição de distância baseados em sonares. Um estudante situado no centro de um pequeno recinto gira em torno de seu próprio corpo com o equipamento na mão, medindo as distâncias de sua posição até a parede em todas as direções. O equipamento apresenta os dados coletados em forma de um gráfico cuja variável independente é o tempo. Uma das etapas da experiência consiste em solicitar ao estudante que esboce o formato do gráfico esperado por ele, antes mesmo de vê-lo pela primeira vez no dispositivo. Em um dos relatos da pesquisa, a resposta de um estudante foi uma circunferência. Após manifestar sua expectativa, o estudante confere o gráfico registrado pelo dispositivo, o que o obriga a articular esse resultado com sua experiência corporal do movimento. O gráfico visto na tela do equipamento em nada se parecia com uma circunferência. Tomando essa experiência como base, proponho uma variação fictícia, em que, em vez de um gráfico, o dispositivo registra os dados em um funcionete especialmente projetado para essa situação. O funcionete consiste em um pino independente que gira circularmente, correspondendo à direção visada, e um dependente que move-se linearmente, correspondendo à distância medida naquela direção. Na Figura 17, há uma ilustração sugestiva de tal dispositivo, na qual o pino independente aparece como uma seta sobre o disco e o pino dependente como uma bandeirola posicionada ao longo de uma haste vertical. A experiência fictícia seria assim: o funcionete tem uma bússola interna, de forma que, ao girar o dispositivo, ele sabe exatamente em que direção, em relação aos pontos cardeais, ele aponta. Além disso, o sonar registra a distância medida na direção visada, fazendo a bandeirola se posicionar proporcionalmente à distância medida. O dispositivo tem um modo de aquisição de dados, no qual ele registra as medidas de direção e distância em pares ordenados. Dessa forma, o estudante deve girar em torno de seu próprio corpo, tendo o funcionete especial sempre apontando à frente (Figura 18). À medida que a distância até a parede à sua frente aumenta ou diminui, a bandeirola se move ao

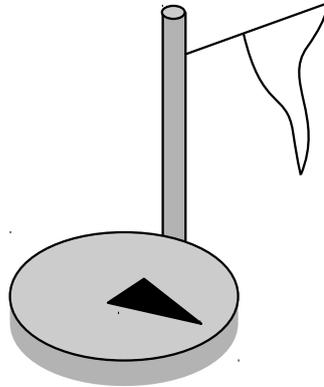


Figura 17: Funcionete especial.

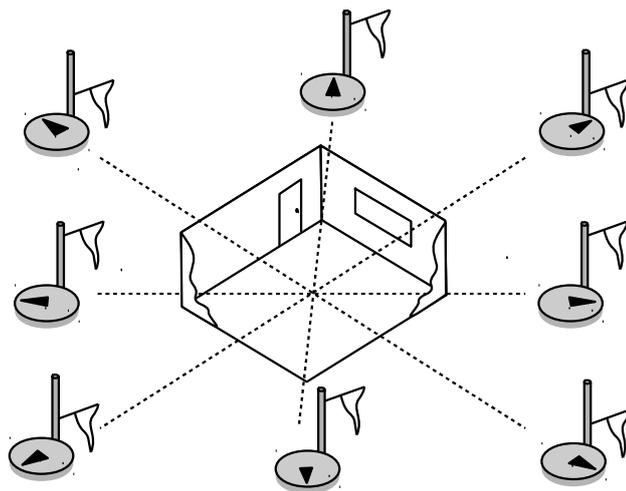


Figura 18: Experiência de Scheffer (2002) adaptada; o funcionete especial é empregado.

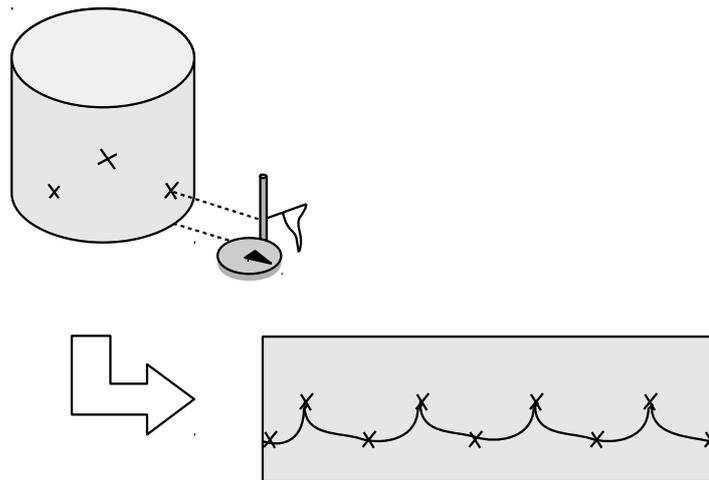


Figura 19: Transposição dos dados coletados para um cilindro e obtenção da representação gráfica pela planificação do cilindro.

longo da haste vertical. *Deve ser evidente para o estudante a relação entre distância à frente e posição da bandeirola, bem como a associação entre elas e a direção, pois há aqui percepções de dependência.* Encerrada a aquisição de dados, o funcionete especial deve ser posto em modo de consulta, a partir do qual as medidas registradas podem ser recuperadas. Isso é feito girando-se o pino independente até a direção desejada e observando-se a resposta do pino dependente (a bandeirola). O dispositivo passa a ser uma *memória* da experiência. A parte final consiste em registrar cada medida em um cilindro de papel, cuidando para que o ângulo da direção medida corresponda ao ângulo de marcação no cilindro. O cilindro assim marcado pode ser aberto e seus pontos ligados, obtendo-se com isso uma representação gráfica muito próxima do que o dispositivo efetivamente utilizado por Scheffer (2002) produziu (Figura 19).

O que se vê nessa experiência fictícia é uma representação gráfica emergir de uma representação dinâmica. Ao que parece, a representação dinâmica coloca-se em um momento mais originário da experiência de função do que a representação gráfica. A representação gráfica tem um aspecto *global* que a representação dinâmica não tem. É como se a representação dinâmica obrigasse uma experiência sempre localizada no domínio da função. Retomando a passagem em que Merleau-Ponty comenta o comportamento de um deficiente visual de nascença que passa a ver pela primeira vez já adulto (Seção 1.4), “[p]ara distinguir pela visão um círculo de um retângulo, é preciso que ele siga com os olhos a extremidade da figura, como o faria com a mão [...]” (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 300). Esse indivíduo ainda não aprendeu a aproveitar o recurso da visão, mediante o qual ela “captura uma constelação de dados de um só golpe” e, mediante a percepção de forma, lhe confere um sentido. O recém-operado precisa visitar

a forma ponto a ponto sequencialmente, antes de aprender o sentido sintético global. Talvez nós, na experiência da representação gráfica, intercalemos momentos em que a percepção de forma aja preponderantemente, realizando sentidos sintéticos globais, com momentos em que a percepção de dependência desvele localmente as relações entre abscissas e ordenadas. As nossas experiências com vértices, pontos de inflexão, descontinuidades, etc. bem poderiam ser um misto de apreciação da forma das curvas e de um percorrer sequencial dos pontos com os olhos, como se fossem as mãos. Este percorrer com as mãos é a qualidade da representação dinâmica por excelência, e o princípio por trás dela é a percepção de dependência. Assim, representações dinâmicas podem vir a se constituir em um momento mais básico da experiência das representações gráficas, configurando-se em recursos hermenêuticos para a explicitação dos sentidos delas. É sempre possível obter um gráfico a partir de um funcionete. Será que o gráfico tornar-se-ia mais compreensível para o aluno iniciante, se ele o visse surgir assim? Assumindo que a operação do funcionete é evidente para o aluno, pois ela aciona a percepção de dependência, que é um sentido originário do mundo dele, será que uma associação explícita entre funcionete e gráfico elucida os sentidos do gráfico? Essa é uma possibilidade. Na experiência de Scheffer (2002), esperava-se que o aluno associasse a sua experiência do giro pelo recinto com o gráfico apresentado pelo equipamento, mas nem sempre isso foi imediato. Será que se a experiência fictícia com o funcionete especial fosse realizada, trazendo um elo intermediário supostamente evidente, que é o registro dos dados pelo funcionete e a subsequente transferência para o cilindro que vai se abrir em gráfico, ela seria qualitativamente diferente da experiência original? As representações dinâmicas ganham um novo sentido, o de ferramentas de apoio para o ensino de funções e suas representações gráficas, e esse parece ser um bom motivo para renovar o interesse nesses dispositivos.

Quero destacar a importância que esta discussão teve na gênese do trabalho como um todo. Quando surgiu a ideia de funcionetes, imediatamente em seguida, já estava claro como realizar uma hermenêutica da representação gráfica com auxílio deles. *Essa simples ideia foi a desencadeadora principal dos movimentos que levaram ao desenvolvimento do trabalho.* Se a representação dinâmica é mais originária que a representação gráfica, ela poderia ser um conhecimento direto? Isto é, seria ela “a coisa mesma”, a própria função? Explico melhor: o nome de uma pessoa é uma representação da pessoa; nós o usamos para chamá-la ou para ocupar o papel da própria pessoa na elaboração de uma frase, etc., logo a representação é algo diferente daquilo que ela representa. O que dizer de uma idealidade matemática? Se a representação de uma idealidade não é a própria idealidade, onde esta está? Onde estão o número 7, a bissetriz do primeiro quadrante do plano cartesiano, a função cosseno? O gráfico da função tangente é uma representação da função tangente, portanto, cabe perguntar: onde está a função tangente?

Um funcionete que se comportasse como a função tangente, por se mostrar por percepção, seria a função ela mesma? Foi por causa dessas questões que eu considerei seriamente pela primeira vez a fenomenologia da percepção, pois ali eu havia ouvido falar em “presença”, “conhecimento direto e não por representação”, etc. Um funcionete enquanto funcionete, mas não enquanto função, é a coisa em si, é a experiência em si, é a sua *presença*. Por isso, ele dispensa explicações, seus sentidos estão nas formas como ele se doa, são evidentes. Enquanto função, contudo, é outra discussão. Essas questões primeiras, paradoxalmente, seguem sem resposta, aguardando um aprofundamento na fenomenologia para voltarem à tona: o que é representar uma função?

Esta é a seção mais adequada para se inserir uma reflexão que, embora diferente da posição apresentada anteriormente, lhe é algo próxima. Se as representações dinâmicas podem servir de apoio para as representações gráficas, então ainda estamos atendendo aos interesses do educador matemático, que, por conjuntura, tem a representação gráfica como um dos fins do ensino de funções. Contudo, por exercício de reflexão e por interesse meramente de pesquisa, é possível imaginar um cenário educacional em que todo o processo se dá apenas com representações dinâmicas. Por exemplo, visto que é potencialmente viável realizar integração discreta de equações diferenciais com funcionetes, então uma experiência de modelagem matemática em que a formulação do problema (a construção da equação diferencial e sua parametrização), sua resolução (a integração) e exploração da resposta (obtenção de valores) poderia se dar inteiramente no domínio da percepção de dependência. Isso significaria uma autêntica ação pedagógica sob a égide da cognição corporificada. Até então, a maioria das pesquisas sobre cognição corporificada tem o grande mérito de chamar a atenção sobre suas propriedades, mas, no final, só reconhece sucesso se houver uma compreensão do domínio da matemática. Os sentidos do corpo, embora valorizados, ainda são de segunda classe, pois de nada valem se não desembocarem em resultados reconhecíveis pelos sentidos matemáticos. Há um contrassenso nisso. Goldenberg, Lewis e O’Keefe (1992) fazem um resumo das dificuldades que alunos têm ao lidar com representações gráficas, especialmente aqueles em que há uma necessidade de coordenar representações, especialmente a gráfica e a simbólica (ou algébrica). Daí o interesse nas representações dinâmicas, mas eles concluem que estas são, para eles, mais como bons pontos de partida. De alguma forma, eles não parecem enxergar o domínio da percepção como um domínio autônomo e legítimo, terminando por subordiná-lo ao sentido matemático. É como se eles estivessem partindo de dentro do domínio da matemática e não conseguissem dar o passo completamente para fora. Seus DynaGraphs trazem consigo uma tônica da notação matemática, da ambiência matemática, não chegam a ser algo completamente perceptivo. Outro exemplo é o sistema *Line Becomes Motion*, proposto por Ricardo Nemirovsky e usado por Scheffer (2002).

Tratam-se de carrinhos presos a eixos, que podem ser empurrados, gerando um gráfico, ou, ao contrário, podem obedecer a um gráfico traçado previamente. Há a clara intenção de se relacionar o movimento do corpo às representações gráficas, mas, novamente, a condição de sucesso do aprendizado é o sentido matemático corriqueiro de gráfico, não se abre claramente a possibilidade de uma representação mais próxima da natureza do corpo. Representações dinâmicas de funções podem, sim, se constituir em caminhos autônomos e independentes de expressão de um conhecimento matemático de natureza diferenciada, e a cognição corporificada pode ser verdadeiramente valorizada como dimensão originário de conhecimentos. Isso não implica, contudo, um desconhecimento dos sentidos matemáticos, apenas que a forma como eles estão atrelados na literatura merece ser melhor entendida. É, como já disse, antes de tudo, uma questão de potencial interesse para a comunidade científica de educação matemática. Talvez a chave seja a compreensão do papel da percepção na existência humana, que costuma ser subestimado, e, que, pela fenomenologia, ganha destaque acentuado.

2.6 Considerações finais

Ao longo de todo o presente capítulo, o feliz encontro entre a percepção de dependência e o conceito matemático de função revelou, acima de tudo, as nuances da percepção em ação no contexto da educação matemática. Contudo, uma compreensão ampla e final ainda está por ser dita. A percepção desnuda uma dimensão da existência humana que costuma ser esquecida, mas que está sempre lá, antes de tudo, antes das palavras, antes da razão. E, no entanto, embora esquecida, essa dimensão é o caldo da própria vida. Se as palavras e os símbolos não são suficientes para nos permitir compartilhar e comunicar essa dimensão entre nós, apelamos para outros recursos. As artes plásticas são um domínio prolífero de bons exemplos nesse sentido. Um caricaturista, ao realçar os traços de uma pessoa, revela uma experiência da pessoa que ele vive internamente e que não conseguiria compartilhar de outra forma: no traço do artista aparecem os humores, os tiques, os trejeitos, os exageros, o feio e o belo tal como ele os vive naquela pessoa. Uma escultora, buscando exprimir a sua experiência de mulher, cria formas inusitadas, que, contudo, despertam no espectador algo da experiência feminina que não poderia se revelar por outros meios. A percepção revela, através da arte, canais profundos de comunicação de experiências, ainda que como tímida promessa de realização de uma tarefa impossível. Seriam as representações dinâmicas de funções canais mais profundos de comunicação de sentidos matemáticos? Seriam, para o educador matemático, um recurso hermenêutico para trazer à tona sentidos antes inacessíveis?

Em que sentido o professor é um hermenêuta? [...] ele interpreta o assunto

que ensina, na medida em que procura torná-lo claro, tirá-lo da obscuridade, para os seus alunos. [...] Ele traduz o que é para ser dito, na tentativa de fazer com que o que é estrangeiro, ininteligível para o aluno, se lhe torne familiar. (BICUDO, 1991, p. 92)

A percepção de dependência é mesmo esse solo tão familiar para nós, suficiente para sustentar lampejos de construções tão engenhosas como o cálculo diferencial e integral e a álgebra linear? São questões que acabam de brotar da reflexão teórica e aguardam a oportunidade de encontrar o crivo da prática educativa.

Muito se fala na importância da visualização na educação matemática, como, por exemplo, em Borba e Villarreal (2005). Porém, a experiência visual é, antes de tudo, uma experiência perceptiva também. Ihde (2007) abre uma frente de batalha contra o predomínio exagerado do *visualismo* nas ciências a partir do século XX. Segundo o autor, a medicina do século XIX preparava-se para ser uma técnica eminentemente auditiva, quando foi desenvolvida a técnica de raio X. Desse momento em diante, houve um declínio acentuado da tendência auscultativa da medicina em favor da inspeção visual das chapas internas. Mas, não somente na medicina: o autor reclama do abandono de outras formas de percepção nas ciências modernas em favor do visualismo. Na educação matemática, talvez fosse mais justo adotar o termo *percepção* ou *perceptualismo* em detrimento de *visualização*, visto que aquele contempla este e ainda o amplia, incluindo formas táteis, sonoras ou mesmo sentidos visuais secundários, que perdem destaque frente a uma equivocada noção de visão como pura sensação de imagens. As representações dinâmicas de função são exemplos concretos da realização do espírito da comunidade científica que se reconhece sob a alcunha de *visualização*, mas que não são necessariamente apenas *visuais*, e, sim, *perceptíveis*.

3 *Percepção de restrição e geometria dinâmica*

3.1 Considerações iniciais

A geometria dinâmica desenvolve-se na interseção entre informática e educação matemática. Ela é abordada neste capítulo como um meio de mostrar relações entre percepção e educação matemática, não como um fim: não se faz aqui uma caracterização completa da geometria dinâmica, ou mesmo sequer se esboça um painel da literatura científica sobre o tema; não se considera o ensino de geometria e os modos como a informática atua nesse contexto. O fim último desta parte do trabalho é tão somente explicitar sentidos de percepção fundamentais para a realização da geometria dinâmica e a maneira como eles se articulam com idealidades matemáticas. Inevitavelmente, emerge daqui uma compreensão sobre a natureza da geometria dinâmica, mas isso não é um propósito deliberado, é um resultado colateral.

Há similaridades e diferenças entre os casos da geometria dinâmica e das representações dinâmicas de funções, e isso se reflete no contraste entre o Capítulo 2 e o presente capítulo. Ambos principiam com seções dedicadas ao delineamento de sentidos de percepção a partir de descrições de situações cotidianas ou de experiências verossímeis. No caso da geometria dinâmica, o sentido de percepção indicado é o sentido de restrição ou impedimento (Seção 3.2). Em ambos os casos, há uma articulação entre o sentido de percepção e uma idealidade, porém, a grande diferença entre eles reside justamente aí: enquanto que, no caso das funções, a idealidade matemática é de grande interesse para a matemática em geral e para a educação matemática em particular, no caso da geometria dinâmica, a idealidade matemática é um tanto incomum e, talvez por isso, não tenha merecido tanta atenção. A idealidade matemática associada à geometria dinâmica, por incrível que pareça, não é a geometria euclidiana plana propriamente dita, mas o processo computacional de resolução de sistemas de restrições geométricas (Seção 3.3). Essa idealidade matemática não é conteúdo de nenhum currículo, portanto não é alvo de consideração pedagógica de nenhuma natureza, nem mesmo neste trabalho, que pretende trazê-la à tona. É por isso que o presente capítulo é desproporcional em relação ao Capítulo 2: aqui não há propos-

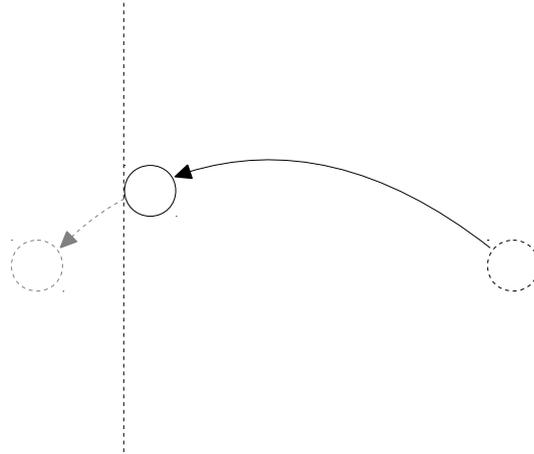


Figura 20: O movimento fica inexplicavelmente restrito à área à direita de uma fronteira imaginária.

tas pedagógicas a fazer. Outra diferença entre os casos das representações dinâmicas de funções e da geometria dinâmica é que, naquele, as idealidades são bem conhecidas em seu sentido puramente matemático e recorre-se ao sentido alegórico-perceptivo como recurso pedagógico e, neste, a idealidade é completamente ignorada em seu sentido puramente matemático, pois uma apresentação eminentemente perceptiva domina a experiência, eclipsando o sentido matemático. No entanto, esse predomínio do sentido perceptivo na geometria dinâmica, como se vê na Seção 3.4, é um fator limitador da compreensão da ferramenta e de sua aplicação, seja por parte de professores ou até mesmo de pesquisadores de educação matemática. Por mais surpreendente que possa parecer, é justamente a revelação do sentido matemático da geometria dinâmica quem melhor pode ajudar na superação dessa limitação de compreensão.

3.2 Percepção de restrição

Os princípios e procedimentos adotados nesta seção são absolutamente os mesmos que embasam a Seção 2.2, por isso, omite-se aqui tal fundamentação. Como naquela seção, há aqui uma descrição de uma experiência fictícia, seguida de breves relatos de situações corriqueiras.

A experiência é a seguinte: uma peça circular está à disposição para ser movimentada. É possível arrastá-la de um lado para o outro, de cima para baixo. Inexplicavelmente, porém, a partir de uma certa fronteira vertical imaginária, a peça fica retida, como se houvesse ali uma parede invisível que a impedisse de progredir (Figura 20). Após várias tentativas de movimentação, mesmo se mudando os caminhos de abordagem, o comportamento se repete.

A partir disso, estabelece-se um sentido de impedimento ou restrição. Esse é um sentido de percepção. Ele não é fruto de um juízo, isto é, de uma interpretação mediada pela aplicação de um conceito. É um sentido originário, primeiro, imediato—isto é, sem intermediários—, o ponto a partir do qual se pode traçar uma conceituação de restrição. É, por isso, um sentido universal, que fala da vida humana para além das culturas, como a discussão a seguir atesta.

Há diversas situações corriqueiras em que o sentido de percepção de restrição se manifesta:

- Experiências de limitação do próprio movimento: uma criança quer correr, mas seu pai a segura pelo casaco; ela se estica o mais que pode, mas sabe que não pode se mover e por quê. Um rapaz pisa no cadarço solto do sapato; ele tenta dar o passo, mas tropeça; o sentido de que seu pé foi impedido de realizar o movimento pretendido é bem compreendido por ele. Uma porta, ao ser fechada, oferece resistência no final da ação; o sentido de que algo impede o fechamento completo se estabelece e logo se encontra, no chão, entre o batente e a porta, o objeto que motivou o impedimento.
- Experiências de barreiras naturais ou artificiais, territórios e confinamentos: uma criança corre por um terreno até chegar a um riacho caudaloso; ela sabe do perigo de cruzar o riacho e se vê confinada a uma das margens. Paredes, portas, divisórias e outros obstáculos impedem a livre circulação das pessoas, que têm de contorná-los por vias de acesso apropriados, como corredores, ruas e outras passagens; é a experiência do labirinto, cujo sentido é universal.
- Experiências de apoio: um objeto solto no ar cai em queda livre até encontrar o chão; o chão e outras superfícies horizontais, como as mesas, servem de apoio para objetos justamente porque os impedem de prosseguir o movimento natural originado pelo próprio peso. Um homem encosta no batente de uma porta para descansar, seguro do equilíbrio de conjunto, pois o batente impede o que seria o movimento de queda. De forma similar, um servente apoia uma vassoura numa parede. Sentar-se em cadeiras, sofás, bancos de praça ou mesmo troncos caídos é um gesto de sentido universalmente compreendido.
- Experiências de vínculo, prendimento, amarração e ligação: dois objetos atados por um fio e por um nó tornam-se solidários; uma barra de aço soldada a outra transfere para ela parte dos esforços mecânicos que sofre, e o conjunto passa a se comportar como uma coisa só. Peças que correm soltas ao longo de eixos, embora possuam uma certa liberdade, têm seu movimento definido pelas possibilidades que o eixo proporciona; é o exemplo da armação móvel de um guarda-chuva. Roupas penduradas num varal estão impedidas de cair.

Esse é um sentido difícil porque tão próximo e tão óbvio; ele já se manifesta nos bebês que aprendem a realizar os primeiros movimentos. É curioso como mesmo em animais há indícios de tal sentido: cães têm um sentido de território e podem ser ensinados a não ultrapassar limites, que muitas vezes são mesmo invisíveis.

3.3 Geometria dinâmica como resolução de sistemas de restrições geométricas e a percepção de restrição

Para explicitar o papel da percepção na experiência da geometria dinâmica, é preciso colocar lado a lado os sentidos perceptivo e matemático relacionados a ela. O sentido perceptivo já está presente na forma natural de operação da geometria dinâmica, porém o sentido matemático é menos evidente. Portanto, uma etapa intermediária a ser cumprida consiste em desvelar a idealidade matemática da qual a geometria dinâmica é uma projeção alegórico-perceptiva. Para tanto, deve-se partir da geometria dinâmica tal como é vivida usualmente.

A Figura 21 é um mosaico que mostra etapas da construção de um arco capaz e experiências interativas que se podem realizar com ele em um ambiente de geometria dinâmica. Na geometria euclidiana plana, um arco capaz é definido em função de uma certa medida angular. A propriedade notável do arco capaz é que todo ângulo formado entre duas semirretas que partem de um mesmo ponto no arco e passam por suas extremidades tem sempre a mesma medida angular, que é a medida original. A notação gráfica da figura está mais parecida com a simbologia geométrica dos livros do que aquela adotada pelas interfaces gráficas de geometria dinâmica, porém, relevando-se esse aspecto, as quatro etapas iniciais da construção tanto poderiam ser realizadas em papel quanto em um ambiente computacional. Em (a), tem-se o ponto de partida da construção, isto é, o ângulo de referência, que só não pode ser nulo, isto é, \overline{AB} e \overline{AC} não podem ser colineares. Em (b), obtém-se o centro do arco capaz, que é a interseção entre a mediatriz de \overline{AB} e a perpendicular a \overline{AC} que passa por A . Em (c), traça-se o arco capaz, isto é, um trecho de circunferência com centro em O e raio \overline{OA} , ligando A e B pelo lado oposto a C em relação a \overline{AB} . Isso conclui a construção do arco. Em um ambiente de geometria dinâmica, podem-se alterar as posições dos elementos originais, em função das quais todos os demais elementos foram posicionados. Assim, é possível mover A , B e C e observar alterações em O e no arco. Em (d), mostra-se uma experiência para verificar a propriedade do arco capaz. P é um ponto qualquer sobre o arco. Ligando-se P a A e a B e tomando-se a medida do ângulo \widehat{APB} , observa-se que ela é idêntica à medida de \widehat{BAC} . Enquanto que, em papel, podem-se traçar uns tantos ângulos como esse para concluir que eles têm sempre a mesma medida, em geometria dinâmica, essa experiência é ainda mais interessante, pois, uma vez que P foi posicionado

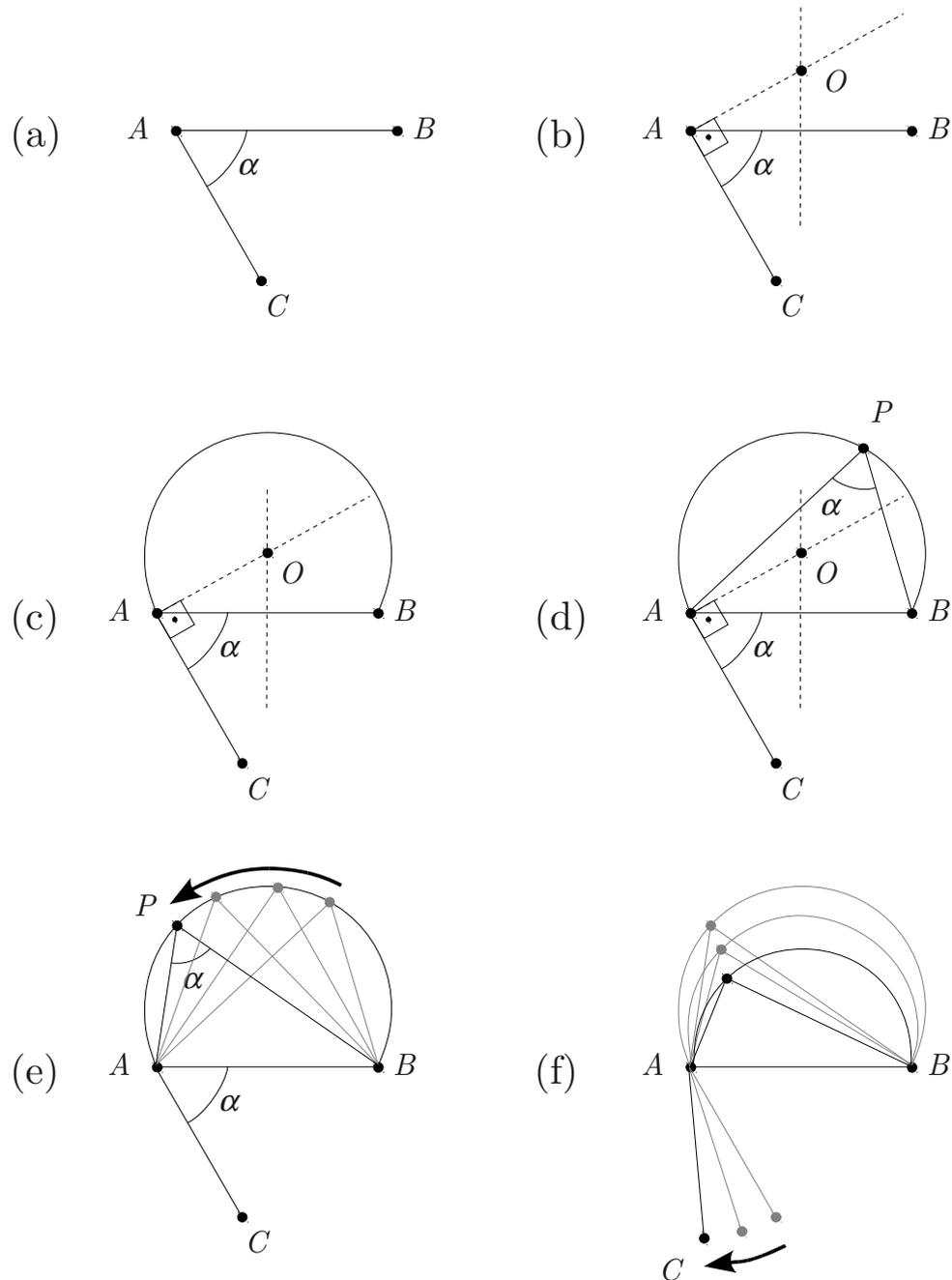


Figura 21: Construção de arco capaz e verificação de sua propriedade em geometria dinâmica.

com a restrição de que sempre esteja no arco, é possível movê-lo ao longo do arco e observar a propriedade da constância do ângulo em um espaço perceptivelmente contínuo de posições de P . Em (e), há uma tentativa de representar graficamente esse processo. A situação em que a geometria dinâmica se mostra mais vantajosa do que o desenho em papel é ilustrada em (f). Nessa experiência, o ângulo de referência é alterado, desencadeando a transformação de todos os elementos que dele dependem. Nesse caso, é interessante observar que a medida do ângulo $A\hat{P}B$ mantém-se idêntica à de $B\hat{A}C$, mudando à medida que ela muda. Essa experiência é tão fácil de realizar em geometria dinâmica quanto a anterior, ao passo que, desenhando no papel, ela seria significativamente mais trabalhosa. A geometria dinâmica, portanto, proporciona um tipo de vivência em que a construção geométrica é *fluida*, isto é, ela é passível de ser alterada interativamente através de operações de arrasto de suas partes.

Para chegar ao sentido matemático subjacente a esse relato, um passo intermediário auxiliar consiste em imaginar um sistema computacional que realizasse as mesmas funcionalidades da geometria dinâmica com a diferença de que, em vez de uma interface gráfica, tal sistema teria uma interface textual, isto é, as operações seriam realizadas através de comando escritos em uma linguagem formalmente definida no sistema. A Figura 22 reproduz as mesmas operações mostradas na Figura 21 em um formato textual. Abstraindo a interface com usuário, os dois sistemas são absolutamente idênticos. Seus núcleos são processos computacionais capazes de montar e resolver sistemas de restrições geométricas. Eles aceitam comandos de simples posicionamento de entes geométricos (“Insira um ponto”, “Insira uma reta”, etc.) e de definição de restrições (“Os pontos não são colineares”, “A reta passa pela mediatriz”, “O ponto está sobre o arco”, etc.). A partir do sistema de restrições geométricas assim definido, o núcleo é capaz de responder a inferências (“Exiba a medida do ângulo”). Resolvedores de sistemas de restrições em geral podem ser de difícil realização computacional. O exemplo clássico de sistemas de restrições é a elaboração do quadro de aulas de um curso universitário, onde restrições tão díspares quanto disponibilidade de horários de professores, alunos, de salas de aula e outros recursos concorrem de forma muito complexa. Dechter (2003) é uma referência sobre o tema. As inferências que um tal sistema pode vir a efetuar no domínio da geometria podem ser tão sofisticadas quanto se queira: coincidência de pontos, localização de pontos sobre retas, paralelismos, medidas de diversas naturezas (comprimentos, áreas, distâncias, ângulos, etc.), e, assim, por diante.

O passo final da explicitação do sentido matemático associado à geometria dinâmica consiste em pensar como seria realizar o mesmo processo sem computadores. É o que faria um matemático teórico: ele escreveria a lista das definições e restrições como uma sequência de equações e calcularia as propriedades que lhe interessassem. Porém, é importante frisar que a

- (a) Insira três pontos não colineares e chame-os A, B e C.
Insira um segmento de reta entre os pontos A e B
Idem para os pontos A e C.
Exiba a medida do ângulo entre AB e AC.
- (b) Insira uma reta m que passa pela mediatriz do segmento AB.
Insira uma reta p que é perpendicular a AC e passa por A.
Insira um ponto O na interseção entre m e p.
- (c) Insira um arco de circunferência c com centro em O, ligando
A e B no semiplano definido por AB e oposto a C.
- (d) Insira um ponto P sobre c.
Insira um segmento de reta entre os pontos P e A.
Idem para P e B.
Exiba a medida do ângulo entre PA e PB.
Exiba a comparação entre o ângulo entre AB e AC e
o ângulo entre PA e PB.
- (e) Repita o passo (d) para outras posições de P sobre c.
- (f) Repita o passo (d) para outras posições de C.

Figura 22: Construção de arco capaz e verificação de sua propriedade em um sistema computacional com interface textual.

Sejam A , B e C três pontos dados sobre um plano, não colineares. Sejam O um ponto, m e p retas e c uma circunferência. Diz-se que c contém o arco capaz do ângulo $B\hat{A}C$ se:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \perp \overline{AB} \\ m \text{ passa pelo ponto médio de } \overline{AB} \\ p \perp \overline{AC} \\ A \in p \\ O = m \cap p \\ O \text{ é o centro de } c \\ A \in c \\ B \in c \end{array} \right. \quad (3.1)$$

O arco capaz é a interseção entre c e o semiplano definido pela reta que passa por \overline{AB} e oposto a C . Qualquer ponto P no arco capaz satisfaz a propriedade: $\alpha = \beta$, onde α a medida do ângulo $B\hat{A}C$ e β a medida do ângulo $A\hat{P}B$. Essa propriedade pode ser constatada empiricamente: se $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (1,-1)$, então $\alpha = 45^\circ$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} P' = (1, 1 + \sqrt{2}) \Rightarrow \beta = 45^\circ \\ P'' = (0, 2) \Rightarrow \beta = 45^\circ \\ P''' = (2, 2) \Rightarrow \beta = 45^\circ \\ \vdots \end{array} \right.$$

Figura 23: Definição de arco capaz como um sistema de restrições (3.1) e verificação experimental de sua propriedade.

ação equivalente à geometria dinâmica no âmbito matemático não é a demonstração formal, mas uma verificação por cálculo ou desenho. Um possível registro de tal procedimento é mostrado na Figura 23, que poderia ser complementado com uma imagem similar à Figura 21 (d). As contas que o matemático realizaria para calcular o valor do ângulo β são omitidos no registro hipotético, assim como eles também não são mostrados para os usuários de sistemas computacionais. Não é necessário explicitar o processo de resolução manual do sistema de restrições geométricas, mas apenas a sua montagem e a resposta pronta, pois é isso mesmo que ocorre na experiência da geometria dinâmica.

Na passagem da geometria dinâmica para o sistema computacional com interface textual, já é possível detectar consideráveis mudanças de sentido e de qualidade de percepção. A grande diferença reside no fato de que os sentidos visuais deixam de ser dados como presença.¹ Há,

¹É possível que, ainda assim, eles estejam atrelados por outros meios: quando se entra em contato com uma apresentação tal como as Figuras 22 e 23, pode se fazer, de forma não deliberada, uma articulação entre o sentido estabelecido pela descrição puramente textual com sentidos visuais intencionais, só que não há a presença de

na experiência da geometria dinâmica, um conjunto vasto de sentidos de percepção visuais atuando simultaneamente: os sentidos de formas, de sobreposição, de paralelismo, etc., além dos significados, isto é, sentidos semióticos, como as convenções da simbologia gráfica de geometria.² Muitos desses também estão presentes em atividades seculares de estudo de geometria euclidiana, realizadas desenhando-se em papel. O que torna a experiência informática diferente é um sentido de percepção que, na comparação com as outras experiências mencionadas nesta seção, é quase exclusivo dela, e esse sentido é justamente o sentido de restrição. Na experiência do arco capaz mostrada na Figura 21 (e), o ponto P é movido ao longo do arco de circunferência c , permanecendo preso a ele. Mesmo que a seta apontadora que manipula o ponto extrapole a vizinhança do arco, os programas de geometria dinâmica realizam um efeito em que o ponto continua controlado por ela à distância, mas ainda preso ao arco. *Esse fato é compreendido com naturalidade porque fala ao sentido perceptivo de restrição. P está preso em c .* O mesmo sentido que torna compreensível a operação de um guarda-chuva, que é uma rede intrincada de restrições estabelecida na própria construção do dispositivo, é o sentido que atua em momentos-chave da experiência da geometria dinâmica. Prender um ponto em uma linha reta (ou curva), obrigar que duas retas sejam sempre paralelas (ou perpendiculares), forçar a tangência de duas circunferências, etc. e depois movimentar tais construções entendendo que as restrições impostas estão sendo obedecidas é uma parte fundamental da operação da geometria dinâmica. *Essas restrições dadas por construção podem não estar evidentes em imagens estáticas, mas, a partir do momento que o conjunto entra em movimento, elas vêm para primeiro plano e passam a ser as protagonistas ou aquilo de mais essencial nessa atividade.* E tudo isso requer a mobilização da percepção de restrição, isto é, dessa capacidade natural de estabelecer sentidos de vínculos e impedimentos mecânicos no mundo circundante. As restrições se fazem sentir de uma maneira única para esse sentido de percepção. Com isso, cumpre-se o objetivo principal visado neste capítulo, isto é, está estabelecida uma ligação entre um sentido de percepção e uma idealidade matemática, quais sejam, o sentido de percepção de restrição e a resolução de um sistema de restrições geométricas (geometria dinâmica).

estímulos para satisfazer tais intenções.

²A propósito dos sentidos semióticos, eles estão presentes em todas as modalidades apontadas nesta seção: na geometria dinâmica, nas interfaces textuais e no discurso matemático histórico, tanto como linguagem formal quanto convenção de simbologia em gráficos. Pode-se dizer que umas modalidades são mais ou menos semióticas que outras, algumas podem ser quase que exclusivamente assim, como a formulação da Figura 23. No entanto, é curioso notar na simbologia gráfica, embora ela seja também uma significação convencionalizada, há alguma presença da intuição geométrica em si, pelo menos no aspecto das formas. O círculo, a reta, o ponto, etc. que ali aparecem não são signos arbitrários, pois eles refletem em sua própria forma certas propriedades dos objetos geométricos ideais. É óbvio que um ponto geométrico ideal seria irrealizável, pois ele não tem dimensão e, portanto, seria invisível, assim como retas e curvas ideais também, pois, embora tenham uma dimensão, não têm largura. Porém, ainda assim, o ponto gráfico realiza no processo algo que remete ao ponto geométrico de uma forma muito mais profunda do que uma convenção.

3.4 Implicações da concepção de geometria dinâmica como resolução de sistemas de restrições geométricas

É convidativo discutir a natureza da geometria dinâmica a partir dos resultados da Seção 3.3. Mais do que os entes geométricos em si, a geometria dinâmica é uma experiência das relações que eles guardam *entre si*, que se realizam sempre—ou quase sempre—como restrições.

Um breve olhar sobre a Figura 23, que é a apresentação mais formal de uma experiência de geometria dinâmica, remete ao fato de que, no fim das contas, tudo pode ser visto como uma mera questão de *lógica*. As restrições no sistema 3.1 da Figura 23 bem poderiam ter o sentido de hipóteses ou condições a partir das quais se pretende chegar a conclusões. A propriedade do arco capaz, que é o tema da figura, em seu enunciado traz uma quantificação universal, um conceito da lógica de primeira ordem: “qualquer que seja o ponto no arco”. Coerentemente, o ponto P na experiência da geometria dinâmica funciona como uma *variável livre*, outro conceito da lógica da primeira ordem. *Arrastar o ponto corresponderia a explorar o fecho universal, criado por um quantificador, em busca da constatação da validade de propriedades visadas.* A relação entre lógica e geometria—aliás, entre lógica e matemática em geral—não é uma novidade em si: a própria geometria euclidiana, que é um sistema formal milenar, é prova disso. Contudo, é possível que na experiência da geometria dinâmica, esse sentido fique em segundo plano. Ver a geometria dinâmica como a resolução de sistemas de restrições geométricas e, portanto, como um encadeamento de condições lógicas das quais se quer derivar conclusões ressalta o sentido lógico que pode ser encontrado nela.

Outra linha de análise da geometria dinâmica diz respeito às limitações que uma interface eminentemente alegórico-perceptiva impõe. Por exemplo, a operação de arrastar na geometria dinâmica quase sempre só pode ser realizada movendo-se um elemento por vez. É verdade que a maioria dos programas aceita a seleção de um grupo de elementos, mas, nesse caso, o grupo constitui um bloco solidário cujas posições relativas internas dos elementos jamais se altera numa operação. Pensando no domínio puramente matemático, há uma liberdade muito maior para se imaginarem operações simultâneas sobre os elementos que não seriam realizáveis de forma evidente em sua encarnação computacional gráfica. E, mais que isso, é possível imaginar um conjunto muito mais rico de restrições, vínculos e impedimentos do que aqueles normalmente presentes nos programas de geometria dinâmica. Para citar um caso, a restrição “ponto não pode ultrapassar reta ao ser arrastado” é inexistente na maioria dos programas, mas ela poderia ser útil, por exemplo, na definição de polígonos, que é um caso corriqueiro e motivo de debates teóricos sobre geometria dinâmica, como a conhecida discussão dos monstros (GOLDENBERG; SCHER; FEURZEIG, 2008, p. 81). Passo a resumir essa discussão, para mostrar

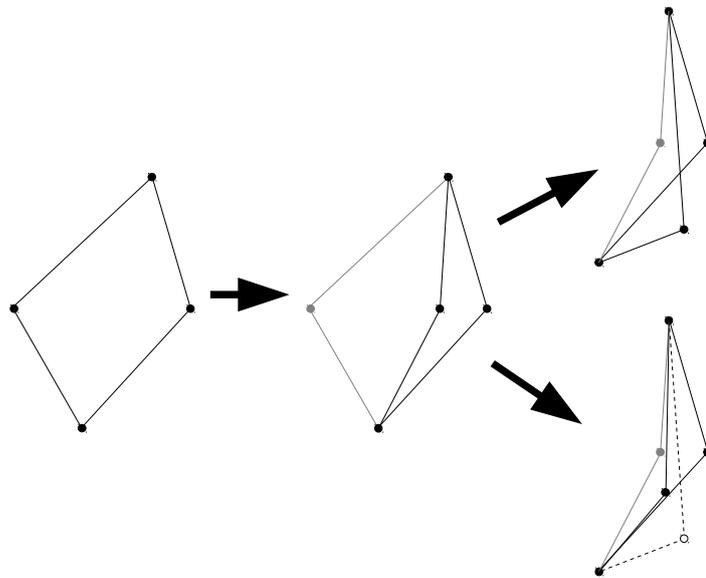


Figura 24: Problema do quadrilátero que se descaracteriza após movimentação na geometria dinâmica e solução alternativa.

como a adição da restrição mencionada auxiliaria nas atividades, e, portanto, como um entendimento estendido da geometria dinâmica leva à superação de dificuldades conceituais. A Figura 24 mostra o problema referente aos polígonos. O usuário do programa de geometria dinâmica realiza uma construção que ele interpreta como um quadrilátero. A construção basicamente consiste em posicionar quatro pontos e estabelecer quatro segmentos que os conectam. O problema acontece quando, ao se movimentar um dos vértices, o quadrilátero degenera para uma forma não reconhecida como tal, como indicado na parte superior direita da figura. Essa situação pode ser facilmente compreendida a partir da noção de sistemas de restrições geométricas. O conjunto de restrições montado pelo usuário não basta para caracterizar um quadrilátero (polígono): no máximo, ele estabelece uma linha poligonal fechada. Adicionalmente, é preciso impedir que os segmentos se interceptem, pois a definição de polígono exclui interseções entre os lados, exceto, obviamente, entre lados adjacentes. Se o programa de geometria dinâmica usado permitisse a adição de restrições do tipo “ponto não pode ultrapassar reta ao ser arrastado” para cada vértice do quadrilátero em relação a seus lados não adjacentes, então aconteceria o que está indicado na parte inferior direita da figura: o ponto ficaria retido, garantindo assim a propriedade que caracteriza o quadrilátero. O usuário se deixa levar pelo sentido puramente perceptivo da forma geométrica, esquecendo que uma linha poligonal fechada, em muitas configurações, coincide com um quadrilátero. Se ele entender a construção como um sistema de restrições geométricas, isto é, o sentido matemático, talvez a confusão não

se estabeleça. E esse não é só o caso da geometria dinâmica: tal análise poderia se estender a toda uma categoria de interfaces gráficas computacionais, nas quais predomina o emprego de alegorias mecânicas como vias de controle—os botões, as barras de rolagem, os menus, etc. Esses elementos, escolhidos como forma de facilitar o entendimento da interface, tornam-se, em seguida, formas de aprisionamento do pensamento sobre a aplicação. Entender a geometria dinâmica para além do seu sentido alegórico-perceptivo, reconhecendo-a como um resolvidor interativo de sistemas de restrições geométricas, pode ajudar a liberar a mente de concepções limitadoras. Esse é um movimento realizado neste capítulo que guarda paralelos, nos efeitos, com a noção de *semântica formal* na ciência da computação. Pode ajudar, também, alunos, professores, pesquisadores e projetistas de programas a pensar caminhos para a geometria dinâmica. Como efeito não pretendido da explicitação realizada neste capítulo, emerge uma compreensão sobre a geometria dinâmica que pode favorecer projetos alternativos de programas de computador dessa categoria.

3.5 Considerações finais

O movimento realizado ao longo do presente capítulo posiciona-se lado a lado com aquele do Capítulo 2 para compor um painel sobre a percepção e a educação matemática. Além das similaridades entre eles já apontadas no início do capítulo, há duas que estão subentendidas e merecem ser abordadas abertamente. Em primeiro lugar, deve-se mencionar o fato de que a idealidade matemática correspondente à geometria dinâmica aqui mostrada é uma computação, isto é, ela encerra um algoritmo ou procedimento de cálculo. Ora, mas, no caso das representações dinâmicas de funções, também. Alguns dos sentidos de função matemática, como mencionado na Seção 1.2, são justamente os de algoritmo ou procedimento. E, na realização de representações dinâmicas, inevitavelmente algo do gênero deve acontecer, seja a avaliação da expressão de uma fórmula, a interpolação de pontos numa tabela, etc. Em segundo lugar, tanto na geometria dinâmica quanto nas representações dinâmicas de funções aparece o adjetivo *dinâmico* e não por acaso. Ambos sentidos de percepção apontados—dependência e restrição—se manifestam mais favoravelmente, senão unicamente, na condição de movimento.³

Tantas similaridades seriam suficientes para caracterizar um padrão? É difícil falar em padrão tendo apenas dois casos em mãos, mas seria, talvez, a forte conexão entre informática e movimento apenas o efeito de uma conexão mais profunda entre percepção e matemática?

³A propósito, uma construção geométrica fluida em geometria dinâmica está repleta de condições de dependência entre suas partes, que podem ser exploradas também no ensino de funções. Há trabalhos de pesquisa publicados nessa linha.

Conclusões

Uma forma de ver este trabalho é considerá-lo como uma intrincada argumentação teórica criada inicialmente para dar sentido às experiências ingênuas mencionadas na Introdução—associar funções a torneiras, geometria dinâmica a guarda-chuvas, propor os funcionetes—que, embora independentes, têm a característica comum de serem marcadas por um notável sentimento de similaridade, tendo uma delas um apelo da natureza das preocupações didáticas. De início, eu estava inclinado a considerar, como melhor explicação para a situação, o pensamento alegórico, isto é, a manifestação de um comportamento mediante o qual certas coisas são entendidas através de outras. Percorrida essa jornada, contudo, a explicação que mais me satisfaz é considerar essas manifestações de similaridades como efeitos de minha compreensão pessoal, subjetiva e pré-predicativa dos conceitos envolvidos, dando-se a conhecer externamente por canais que lhes permitiram a expressão.

A contribuição principal que a argumentação teórica criada traz é posicionar a percepção no cenário da educação matemática de uma forma bem singular. Este trabalho vem para compor o mosaico de trabalhos científicos da área de educação matemática que reconhecem a importância, para a educação matemática, da percepção—em especial—e do corpo e da cognição corporificada—em geral—. Ele também se alinha, nos propósitos, com trabalhos que defendem o papel da visualização na educação matemática, porém amplia essa noção de certa maneira (Seção 2.6). O que justifica uma colocação distinta deste trabalho lado a lado com todos esses trabalhos mencionados são suas características específicas, das quais se destacam:

- A concepção de percepção que este trabalho evidencia é nutrida diretamente do pensamento de Maurice Merleau-Ponty e de outros fenomenólogos (Seção 1.4). A fenomenologia é uma corrente de pensamento que busca uma explicitação radical da cognição humana e do ser como um todo (Seção 1.3). Para isso ela tematiza, principalmente, o sujeito cognoscente. A argumentação deste trabalho reflete esse caráter e o evidencia em primeiro plano. É um ponto forte que não pode ser subestimado.
- Como consequência direta da adesão à fenomenologia, mas também como uma característica própria entre as demais, a experiência humana, mesmo em situações as mais singelas, transparece, ao longo de todo o trabalho, como o solo dominante que sustenta

a argumentação. Há uma valorização proposital da experiência humana como fonte de sentidos para a ciência e para a educação matemática (Capítulo 1, Seções 2.2 e 3.2). Isso confere à argumentação um poder de explicitação e convencimento bem distintos. O uso intensivo de descrições corriqueiras é o maior indicativo desse caráter. Fonte de virtudes, o reconhecimento da experiência é também razão de fragilidades: este trabalho foi construído tendo como contraponto vivências da educação matemática, e não o corpo de conhecimentos da literatura da área, por isso, pouco evidencia a visão científica da área naquilo que mais se aproxima do seu tema, e vagamente se posiciona em relação a ela.

- Partindo da posição privilegiada colocada pelos fenomenólogos, em que a percepção toma conta de—e reina sobre—a experiência de cognição humana, esse trabalho pontua concretamente dois momentos da educação matemática em que a percepção se faz sentir e, sobretudo, explicita como isso se dá. Conhecimentos importantes se delineam aí: o de que existe uma capacidade, ou sentido, de percepção de dependências (Seção 2.2), e outra de percepção de restrições (Seção 3.2), as quais são suscetíveis a ideias abstratas como funções (Seção 2.3) e sistemas de restrições (Seção 3.3) respectivamente.
- Concordante com a visão de como a percepção atua em um dos casos abordados, este trabalho aponta uma possível forma de articulação da percepção em uma ação pedagógica (Seção 2.4), mais especificamente, empregando instrumentos como o ponto de articulação da percepção e do conteúdo pretendido, no caso, as funções através dos funcionetes, que também são uma contribuição original que derivou do trabalho.

As funções matemáticas, as transformações lineares e o ensino de tais conteúdos nunca foram fins, mas meios: meios para falar da percepção. Não foi feita uma fundamentação ampla sobre as pesquisas com funções ou temas correlatos. Da mesma forma, a geometria dinâmica nunca foi um fim, e as pesquisas da área sequer começaram a ser destrinchadas: a geometria dinâmica foi mais um exemplo em que se tornou palpável a ação da percepção. No entanto, este trabalho pode ser de interesse para pesquisadores ligados a todos esses temas, pelas seguintes razões:

- A posição teórica de que funções matemáticas como dependências funcionais ressoam com um senso de percepção pode compor um painel com outras teorias para fins de comparação; as ideias de atividades sugeridas podem ser um ponto de partida para a elaboração de intervenções pedagógicas em álgebra linear.
- Embora a ideia de representação dinâmica de funções seja antiga, ao que parece não tem atraído tanta atenção recentemente. Este trabalho pode significar uma injeção de ar

renovado nessa linha, chamando a atenção para a ideia e mostrando novas variações. Há aqui muitas intuições iniciais consonantes com Goldenberg, Lewis e O’Keefe (1992), mas fundamentadas por uma linha completamente diferente.

- A formulação segundo a qual a geometria dinâmica foi apresentada confere sentidos especiais, úteis para quem busca montar um painel de formas de concepção da geometria dinâmica, ou mesmo quem procura pensar o desenho dos programas por caminhos alternativos.

Como última contribuição, mas não a menor, as formas como a fenomenologia paulatinamente foi se mostrando ao longo da elaboração da argumentação e terminou por figurar no resultado final tornam este trabalho potencialmente de interesse para aqueles que lidam com o tema ou têm curiosidade sobre ele. Que seja um incentivo ao leitor leigo para olhar a monumental—mas não menos tortuosa—obra de Merleau-Ponty, ou mesmo a de Husserl.

Este trabalho corresponde a um momento de reflexão teórica sobre a educação matemática. No entanto, para que ele se torne mais significativo para a área, precisa se complementar por outras ações, notadamente o exercício das ideias propostas em campo. Durante toda a argumentação, transparece um certo otimismo em relação ao potencial de aplicação das ideias. Esse é o otimismo do momento teórico, e nada mais. É indispensável a dialética do outro: do professor, do aluno, do pesquisador. O *sentido* que essas ideias ganharam não sairá ileso dessa complementação, mas o que restar disso será mais valioso.

Uma etapa importante a ser realizada antes disso é a produção de funcionetes e atividades correlatas, voltados para diversos conteúdos da matemática. Inevitavelmente, a realização computacional dessas ideias será o caminho a ser seguido, mas fica o sonho e a demanda por versões *táteis* e manipuláveis no sentido mais puro: até quem trabalha com educação para portadores de limitações visuais poderia se beneficiar deles. Imagino funcionetes que não só operam através da posição de pinos, mas por outros sentidos de percepção mecânicos, como força e resistência ao movimento.

Devido ao seu caráter teórico, este trabalho abre uma diversidade de possibilidades de continuação enquanto reflexão. Primeiramente, há uma fundamentação teórica pedindo por aprofundamentos, especialmente em questões básicas da fenomenologia, pois as leituras de Husserl e Merleau-Ponty ainda não se esgotaram. Um acabamento detalhista e um polimento teórico são uma tarefa de grande monta, mas cujo resultado poderia despertar algum interesse. Em segundo lugar, pode-se rever trabalhos fundamentais da educação matemática sob o prisma da epistemologia de sentidos evidenciada aqui. Por exemplo, o que seriam os trabalhos teóricos

fundamentais do grupo de pesquisa de que participo, o GPIMEM, tais como Scheffer (2002) e Borba e Villarreal (2005) sob esse enfoque? E o que dizer de trabalhos de vertentes fenomenológicas, semióticas ou semânticas? Sem esquecer, é claro, de trabalhos sobre geometria dinâmica e ensino de funções. Esse diálogo pode ser produtivo para a evolução de ideias que estão só começando.

Referências Bibliográficas

ALEXEEV, V. **Impossible world site blog**: Impossible cube. set. 2008. Disponível em: <http://impossible-world.blogspot.com/2008/09/impossible-cube.html>. Acesso em: 2 de setembro de 2010.

BICUDO, M. A. V. A hermenêutica e o trabalho do professor de matemática. **A Sociedade Cadernos da Sociedade de Estudo e Pesquisa Qualitativos**, São Paulo, SP, v. 3, n. 3, p. 63–95, 1991.

BICUDO, M. A. V. A contribuição da fenomenologia à educação. In: BICUDO, M. A. V.; CAPPELLETTI, I. F. (Orgs.). **Fenomenologia**: uma visão abrangente da educação. São Paulo, SP: Olho d'Água, 1999. p. 11–51.

BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Eds.). **Cases and perspectives**. EUA: Information Age Publishing, 2008. (Research on technology and the teaching and learning of mathematics).

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo, SP: HARBRA, 1986.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation. Prefácio de Ubiratan D'Ambrosio e posfácio de Ole Skovsmose. Nova Iorque, NY, EUA: Springer, 2005. (Mathematical education library, v. 39).

BORTOLOSSI, H. J. **Página pessoal**: Trabalhos. dez. 2009. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/trabalhos.html>. Acesso em: 24 de fevereiro de 2010.

BORTOLOSSI, H. J.; PESCO, D. U. **Como b depende de a ?** maio 2009. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/c1d/c1d-html/c1d-br.html>. Acesso em: 24 de fevereiro de 2010.

BRECHT, B. **Galileo Galilei**. Título original, em alemão: *Leben des Galilei*. Tradução de Oswald Bayer. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Losange, 1956. (Publicación Teatral Periódica).

CASANOVA, M. A. **Compreender Heidegger**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009. (Compreender).

DECHTER, R. **Constraint processing**. Contribuições de David Cohen, Peter Jeavons e Francesca Rossi. San Francisco, EUA: Morgan Kaufmann, 2003.

EDWARDS, B. **Desenhando com o lado direito do cérebro**. Tradução de Roberto Raposo. Prefácio da edição brasileira de Maurício Porto. 14. ed. Rio de Janeiro, RJ: Ediouro, 1984. (Coleção Desenho).

- GOLDENBERG, E. P.; CUOCO, A. A. What is dynamic geometry? In: LEHRER, R.; CHAZAN, D. (Eds.). **Designing Learning Environments for developing understanding of geometry and space**. Mahwah, NJ, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, 1998. p. 351–367.
- GOLDENBERG, E. P.; LEWIS, P.; O'KEEFE, J. Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Eds.). **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. EUA: Mathematical Association of America, 1992, (MAA Notes, v. 25). p. 235–260.
- GOLDENBERG, E. P.; SCHER, D.; FEURZEIG, N. What lies behind dynamic interactive geometry software? In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Eds.). **Cases and perspectives**. EUA: Information Age Publishing, 2008, (Research on technology and the teaching and learning of mathematics). p. 53–87.
- HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Eds.). **The concept of function**. EUA: Mathematical Association of America, 1992. (MAA Notes, v. 25).
- HOLLEBRANDS, K.; LABORDE, C.; STRÄSSER, R. Technology and the learning of geometry at the secondary level. In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Eds.). **Cases and perspectives**. EUA: Information Age Publishing, 2008, (Research on technology and the teaching and learning of mathematics). p. 155–205.
- HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro, RJ: Objetiva, 2001.
- IHDE, D. **Listening and voice: phenomenologies of sound**. 2. ed. Albany, NY, EUA: State University of New York Press, 2007.
- LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. **Where mathematics comes from: how embodied mind brings mathematics into being**. Nova Iorque, NY, EUA: Basic Books, 2001.
- MERLEAU-PONTY, M. **Conversas, 1948**. Organização e notas de Stéphanie Ménasé. Tradução de Fábio Landa e Eva Landa. Revisão da tradução de Marina Appenzeller. São Paulo, SP: Martins Fontes, 2004. (Tópicos).
- MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da percepção**. Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 3. ed. São Paulo, SP: Martins Fontes, 2006. (Tópicos).
- N. E. THING ENTERPRISES. **Olho mágico: uma nova maneira de ver o mundo**. São Paulo, SP: Livraria Martins Fontes Editora, 1994.
- RICOEUR, P. **Husserl: an analysis of his phenomenology**. Tradução de Edward G. Ballard e Lester E. Embree. Apresentação de David Carr. Evanston, Illinois, EUA: Northwestern University Press, 2007. (Studies in Phenomenology and Existential Philosophy).
- SCHEFFER, N. F. **Corpo–Tecnologias–Matemática: uma interação possível no ensino fundamental**. Prefácio de Marcelo de Carvalho Borba. Erechim, RS: EdiFAPES, 2002. (Pensamento Acadêmico).
- SELDEN, A.; SELDEN, J. Research perspectives on conceptions of functions: summary and overview. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Eds.). **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. EUA: Mathematical Association of America, 1992, (MAA Notes, v. 25). p. 1–16.

SPIVAK, M. **Calculus**. 3. ed. Houston: Publish or Perish, 1994.

VINNER, S. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Eds.). **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. EUA: Mathematical Association of America, 1992, (MAA Notes, v. 25). p. 195–213.

WRATHALL, M. A. Existential phenomenology. In: DREYFUS, H. L.; WRATHALL, M. A. (Eds.). **A Companion to Phenomenology and Existentialism**. West Sussex, Reino Unido: Wiley-Blackwell, 2009, (Blackwell Companions to Philosophy). p. 31–47.

ZAHAVI, D. **Husserl's Phenomenology**. Tradução do dinamarquês pelo autor. Standford, Califórnia, EUA: Standford University Press, 2003. (Cultural memory in present).